Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КРЕНЕВИЧ А.П.
ЛОВЕЙКІН А.В.

Методичні вказівки до практичних занять із дисципліни

"Векторний аналіз та теорія поля"

для студентів механіко-математичного факультету
спеціальності "Механіка"

Київ – 2012

УДК 519.942+550

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. О.В.Капустян,
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В.Борисейко.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 8 від 24 квітня 2012 року)

Креневич А.П., Ловейкін А.В.
Методичні вказівки до практичних занять із дисципліни "Векторний аналіз та теорія поля" для студентів механіко-математичного факультету спеціальності "Механіка" – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2012. – 19 с.

Посібник містить теми практичних занять та перелік завдань для аудиторної та самостійної роботи з дисципліни «Векторний аналіз та теорія поля», що викладається студентам спеціальності «Механіка» механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він містить завдання для засвоєння основних базових понять цього курсу, таких як скалярне та векторне поля, градієнт скалярного поля, дивергенція та ротор векторного поля, символічні методи векторного аналізу та диференціальні операції у криволінійних системах координат, гідромеханічне тлумачення аналітичних функцій комплексних змінних.

Для студентів механіко-математичного факультету та викладачів, які проводять заняття з курсу "Векторний аналіз та теорія поля".

Тема 1. Основи векторної алгебри

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти скалярний добуток двох векторів:
   a. $p = 3i + 4j + 7k$; $g = 2i - 5j + 2k$;
   b. $p = 5a + 3b$, $g = 2a - b$, якщо $|a| = 2$, $|b| = 3$, $a \perp b$;
   c. $p = 3a - 2b$, $g = 5a - 6b$, якщо $|a| = 4$, $|b| = 6$, $(a \wedge b) = 60°$;
2. При якому значенні m, вектори перпендикулярні:
   a. $p = mi + 3j + 4k$; $g = 4i + mj - 7k$;
   b. $p = mi + j$, $g = 3i - 3j + 4k$.
3. Знайти кут між векторами:
   a. $p = i + 2j + 3k$, $g = 6i + 4j - 2k$;
   b. $p = 3i + 4j + 5k$, $g = 4i + 5j - 3k$.
4. Знайти орт напряму:
   a. $p = i + 2j + 2k$;
   b. перпендикулярного до вектора $p = i + j + 2k$; $g = 2i + j + k$.
5. Знайти векторний добуток:
   a. $p = 2i + 3j + 5k$, $g = i + 2j + k$;
   b. $p = 2i + 5j + k$, $g = i + 2j - 3k$.
6. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах:
   a. $p = 6i + 3j - 2k$, $g = 3i - 2j + 6k$.
7. Знайти $[a \times [b \times c]]$, якщо $a = i - 2j + 3k$; $b = 4j + k$; $c = 5i + 3j - 7k$.
8. Знайти векторно-скалярний добуток:
   a. $p = 2i - j - k$, $g = i + 3j - k$, $t = i + j + 4k$;
   b. $p = i - j + k$, $g = i + j + k$; $t = 2i + 3j + 4k$.
9. Показати, що три вектори компланарні:
   a. $p = 2i + 5j + 7k$, $g = i + j - k$, $t = i + 2j + 2k$;
   b. $p = 7i - 3j + 2k$, $g = 3i - 7j + 8k$, $t = i - j + k$.
10. Знайти проекцію вектора a на напрямок b і проекцію вектора b на напрямок a, якщо $a = 2i + 2j + k$, $b = 6i + 3j + 2k$.

Тема 2. Вектор-функції скалярного аргументу

Задачі для аудиторної роботи

1. Побудувати годографи для таких кривих:
   a. $r = 2i + t^2 j - t^2 k;$
   b. $r = ti + \frac{t^2}{3} j + \frac{t^3}{9} k;$
   c. $t = \frac{2ti + 2tj + \left(t^2 - 2\right)k}{t^2 + 2}.$
2. Довести, що з тотожності $\left|r\right| = c$ випливає $\frac{dr}{dt} \perp r.$
3. Які траєкторії руху визначені рівністю $\frac{dr}{dt} = \left[a, r\right]$, де a - сталий вектор?
4. Відомо, що точка рухається у просторі за законом $r = \left(a\sin t, -a\cos t, bt^2\right)$, де $a > 0,\ b > 0$ – деякі числа. Знайти годограф точки, її швидкості та прискорення.

Задачі для самостійної роботи

1. Побудувати годограф для кривих:
   a. $r = \frac{t^2 + 1}{\left(t+1\right)^2} i + \frac{2t}{\left(t+1\right)^2} j;$
   b. $r = \cos ti + \sin tj + k.$
2. Нехай $r = r\left(t\right)$. Знайти похідні
   a. $\frac{d}{dt}\left(r^2\right);$
   b. $\frac{d}{dt}\left[r, \frac{dr}{dt}\right].$

Тема 3. Скалярне поле

Задачі для аудиторної роботи

1. Намалювати поверхні рівня для скалярних полів:

   a. $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$;

   b. $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$;

   c. $u = \frac{(a,r)}{(b,r)}$, де a, b - сталі неколінеарні вектори.

2. Намалювати лінії рівня для плоских полів:

   a. $u = x + y$;

   b. $u = \ln\sqrt{\frac{y}{2x}}$;

   c. $u = \frac{y^2}{x}$.

3. Знайти та намалювати лінії рівня скалярного поля, яке визначено неявним чином за допомогою рівняння $u + x\ln u + y = 0$.

4. Знайти для функції u похідну в точці M_0 у напрямку точки M_1, якщо:

   a. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1,1,1)$, $M_1(3,2,1)$;

   b. $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $M_0(1,1)$, $M_1(4,5)$.

5. Знайти похідну скалярного поля $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ у точці $A(3;4)$;

   a. за напрямком бісектриси першого координатного кута;

   b. за напрямком радіус-вектора точки A;

   c. за напрямком вектора $g(4,-3)$.

6. Знайти похідну функції $u = xyz$ у точці $A(1;-2;2)$ за будь-яким напрямком і за напрямком радіус-вектора точки A.

7. Знайти похідну скалярного поля $u = arctg\frac{y}{x}$ у точці $M_0(2,-2)$ кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$ вздовж дуги цього кола у напрямку проти годинникової стрілки.
8. Знайти точки, в яких градієнт скалярного поля $u = \sin(x+y)$ дорівнює $i + j$.
9. Нехай $r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. Знайти градієнт скалярних полів:
   a. $u = (a,r)$;
   b. $u = (a,r)(b,r)$;
   c. $u = \|[a,r]\|^2$.
10. Знайти одиничний вектор зовнішньої нормалі до циліндра $x^2 + y^2 = a^2$.
11. За яким напрямком повинна рухатись точка $M(x,y,z)$ при переході через точку $M_0(-1,1,-1)$, щоб функція $F = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ була зростаючою з найбільшою швидкістю.

Задачі для самостійної роботи

1. Намалювати поверхні рівня для скалярних полів:
   a. $u = x^2 + y^2 - z$;
   b. $u = 3^{x+2y-z}$;
   c. $u = e^{(a,b,r)}$, де a,b - сталі неколінеарні вектори.
2. Намалювати лінії рівня для полів:
   a. $u = 2x - y$;
   b. $u = e^{x^2-y^2}$;
   c. $u = x^2 + y^2$.
3. Побудувати лінії рівня плоских скалярних полів:
4. Знайти для функції u похідну в точці M_0 у напрямку точки M_1, якщо:
   a. $u = x^2y + xz^2 - 2$, $M_0(1,1,-1)$, $M_1(2,-1,3)$;
   b. $u = xe^y + ye^x - z^2$, $M_0(3,0,2)$, $M_1(4,1,3)$.

5. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 - y^2$ у точці (5,4) гіперболи $x^2 - y^2 = 9$ за напрямком цієї кривої при русі «зліва праворуч».

6. Знайти похідну поля $\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ у точці $M(x;y;z)$ за напрямком радіус-вектора цієї точки.

7. Знайти похідну поля $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ за напрямком вектора MA у точці $M(2;2;-1)$, якщо задана точка $A(2;0;1)$.

8. Знайти похідну поля $\varphi = x^2 - y^2$ у точці $M(1;1)$ за напрямком параболи $y = x^2$.

9. Довести диференціальні властивості градієнта, якщо $\varphi = \varphi(x,y,z)$, $\psi = \psi(x,y,z)$, $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $C = const$:

   a. $grad\left(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2\right) = C_1 grad\varphi_1 + C_2 grad\varphi_2$;

   b. $grad\left(\varphi\psi\right) = \psi grad\varphi + \varphi grad\psi$;

   c. $grad\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\psi grad\varphi - \varphi grad\psi}{\psi^2}$;

   d. $gradF(u) = \frac{dF}{du} grad\, u$;

   e. $gradF(u,v) = \frac{dF}{du} grad\, u + \frac{dF}{dv} grad\, v$.

10. Знайти градієнт поля $\varphi = \cos(xyz + 1)$ у точці $M(2;-1;1)$.

11. Знайти кут між градієнтами функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ та $v = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ у точці $M(0,0,1)$.

12. Знайти похідну функції $u = yze^x$ у точці $M(0,0,1)$ за напрямком її градієнта.

13. Знайти похідну скалярного поля $u = u(x,y,z)$ за напрямком градієнта скалярного поля $v = v(x,y,z)$. У якому випадку вона буде дорівнювати нулю?

14. Задана поверхня $F\left(x,y,z\right)=0,$ на ній закріплена точка $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$. Знайти орт нормалі до цієї поверхні в точці M_0.

Тема 4. Векторне поле

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти векторні лінії поля:
   a. $a=\left[c,r\right]$, де c - сталий вектор;
   b. $a=\left(-y,x,b\right)$. Знайти ту векторну лінію, яка проходить крізь точку $\left(1,0,0\right)$.
2. Знайти векторні лінії поля:
   a. $P=\dfrac{i}{x}+\dfrac{j}{y}$;
   b. $P=xi-yj-zk$;
   c. $P=j+yk$;
   d. $P=xi+2z^2j+zk$.
3. Використовуючи той факт, що векторні лінії плоского векторного поля $a=\left(p,q,0\right)$ задовольняють систему рівнянь $\dfrac{dx}{p}=\dfrac{dy}{q}=\dfrac{dz}{0}\Leftrightarrow\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{p}{q}$, $z=const$, знайти векторні лінії полів
   a. $a=x^2i+y^2j$;
   b. $a=zj-yk$.
4. Знайти роботу плоского векторного поля сил $F=\left(x^2+2xy\right)i+\left(x^2+y^2\right)j$ вздовж параболи $y=x^2$ від точки $\left(0,0\right)$ до точки $\left(1,1\right)$.
5. Обчислити криволінійний інтеграл векторного поля $a=\left(y^2-z^2\right)i+2yzj-x^2k$ вздовж кривої $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$.
6. Знайти циркуляцію поля $a=\left(xz+y\right)i+\left(yz-x\right)j-\left(x^2-y^2\right)k$ вздовж лінії $x^2+y^2=1,\ \ z=3$, при обході додатного напрямку осі Oz проти годинникової стрілки.

7. Для поля $a = (x - 2z)i + (x + 3y + z)j + (5x + y)k$ знайти потік крізь трикутник $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ у напрямку нормалі, спрямованому в протилежний бік від початку координат.
8. Обчислити потік вектора $a = (x^2 + y^2)i + (y^2 + z^2)j + (z^2 + x^2)k$ через частину площини XOY, обмежену колом $x^2 + y^2 = 1$.
9. Знайти потік векторного поля $a = y^2 j + zk$ крізь частину параболоїда $z = x^2 + y^2$, відрізану площиною $z = 2$. Нормаль – зовнішня по відношенню до області, яку обмежує параболоїд.
10. Знайти потік векторного поля $a = xi + yj + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}k$ крізь зовнішню сторону однопорожнинного гіперболоїда $z = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$, обмеженого площинами $z = 0$, $z = \sqrt{3}$.
11. Знайти потік поля $a = (xy, yz, xz)$ крізь частину зовнішньої сторони сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка міститься у першому октанті.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти векторні лінії об’ємних та плоских полів:
   a. $a = xi + yj + zk$;
   b. $a = (z - y)i + (x - z)j + (y - x)k$;
   c. $a = xi + zk$;
   d. $a = 2zj + 4yk$.
2. Знайти векторні лінії поля $a = f(r)r$, де r – радіус-вектор точки, f – скалярна функція.
3. Обчислити інтеграл уздовж півкола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le \pi$ у плоскому векторному полі $a = \dfrac{y^2 i - x^2 j}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
4. Знайти лінійний інтеграл вектора $a = x^3 i - y^3 j$ вздовж першої чверті кола $r = R\cos ti + R\sin tj$.
5. Знайти роботу векторного поля $a = yi + xj + xk$ вздовж витка гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. Знайти циркуляцію вектора $a = yi$ по контуру кола $x = b\cos t$, $y = b + b\sin t$, що лежить у площині XOY.
7. Знайти циркуляцію поля $a = (2x+z)i + (2y-z)\,j + xyzk$ вздовж кривої L, утвореної лініями перетину параболоїда $x^2 + y^2 = 1 - z$ з координатними площинами першого октанта.
8. Знайти потік вектора $a = xyi + (y+z)\,j + (x+2z)k$ через частину площини $2x + y + z = 2,$ що лежить у першому октанті.
9. Обчислити потік векторного поля $a = xzi$ крізь зовнішній бік частини параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, обмеженої знизу площиною $z = 0$.
10. Обчислити потік поля $a = yzi - xj - yk$ крізь частину поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, за умови $0 \le z \le 1$.
11. За допомогою формули проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $a = zi - xj + yk$ крізь «верхній» бік трикутника, отриманого внаслідок перетину площини $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ з координатними площинами.

Тема 4. Векторне поле (продовження). Потік через замкнену поверхню, дивергенція, вихор.

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчислити потік вектора $a = 4xi - yj + zk$ крізь поверхню тора, центр ваги якого лежить у початку координат, а віссю обертання є вісь Oz. Мінімальна відстань від центра до поверхні тора – R_1, а максимальна – R_2.
2. Обчислити потік вектора $a = \left(x^2 + y^2\right)i + \left(y^2 + z^2\right)j + \left(z^2 + x^2\right)k$ через поверхню куба, обмеженого площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.
3. Задане векторне поле $P = x^3 i + y^3 j + z^3 k$:
   a. обчислити потік через поверхню кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b. обчислити потік через поверхню куба $0 \le x \le a,\quad 0 \le y \le a,\quad 0 \le z \le a.$

4. Знайти потік поля $a = xi + zk$ крізь поверхню $z = x^2 + y^2,\quad z \le 4.$

5. Для якої функції $\psi(r)$ буде справедливою формула $div\left(\psi(r)\vec{r}\right) = 2\psi(r)$?

6. Чи буде поле $a = x\left(z^2 - y^2\right)i + y\left(x^2 - z^2\right)j + z\left(y^2 - x^2\right)k$ соленоїдальним?

7. Знайти ротор векторного поля $a = \left(x^2 + y^2\right)i + \left(y^2 + z^2\right)j + \left(z^2 + x^2\right)k$.

8. Знайти ротор векторного поля $a = z^2 yi + x^2 zj + y^2 xk$ та $rot\, rot\, a$.

9. Показати, що поле $a = f(\rho)(xi + yj)$, де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ є потенціальним $(rot\, a = 0)$.

10. Нехай a, b - сталі вектори. Довести, що тоді $rot\left((r,a)b\right) = [a,b]$.

11. Нехай a - сталий вектор. Довести, що $rot(r,a) = \dfrac{[\vec{r},a]}{r}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Для якої функції $\psi(z)$ дивергенція поля $a = xi + yj + \psi(z)k$ буде дорівнювати z?
2. Знайти дивергенцію поля:
   a. $a = r^2 c,\ \ c = const;$
   b. $S = xyi + yzj + xzk;$
   c. $P = \left[a \times [r \times b]\right],\ \ a = const,\ \ b = const;$
   d. $a = \varphi(r)c,\ \ c = const;$
   e. $q = e^{xy}\left(-xi + yi + xyk\right);$
   f. $a = \dfrac{x + y + z}{xyz} r.$
3. Знайти дивергенцію поля градієнта функції $U = xy^2 z^3$.

4. За допомогою формули Гауса-Остроградського обчислити потік поля $a = xi + xzj + yk$ крізь замкнену поверхню S, що визначена співвідношеннями $x^2 + y^2 = 4 - z,\ \ z \geq 0$ та $z = 0,\ \ x^2 + y^2 \leq 4.$
5. Знайти потоки векторних полів крізь вказані замкнені поверхні
   a. $a = 2xi + 2yj - zk$;
   $$S = \left[\begin{array}{l} z^2 = x^2 + y^2, 0 < z < H, \\ x^2 + y^2 \leq H^2, z = H; \end{array} \right.$$
   b. $a = i - zj$;
   $$S = \left[\begin{array}{l} z = 6 - x^2 - y^2, z \geq 2, \\ z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2. \end{array} \right.$$
6. Обчислити потік вектора $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ через повну поверхню піраміди, що обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$. Розв'язати задачу двома способами.
7. Обчислити за допомогою теореми Гауса-Остроградського потік вектора $a = r^2 r$ через сферу одиничного радіуса з центром у початку координат.
8. Чи буде поле $a = y^2 i - \left(x^2 + y^3\right) j + z\left(3y^2 + 1\right)k$ соленоїдальним?
9. Перевірити, що поля є соленоїдальними $\left(divP = div\, a = 0\right)$:
   a. $P = yz\left(4xi - yj - zk\right);$
   b. $a = \left[r \times c\right],\ c = const$.
10. Довести, що векторне поле $a = f\left(r\right)\vec{r}$ безвихрове.
11. Знайти ротор поля:
   a. $a = xyz\left(xi + yj + zk\right);$
   b. $S = xyi + yzj + xzk;$
   c. $P = arctg\left(x - y + z\right)\left(i - 3j + 2k\right);$
   d. $a = y^2 i - x^2 j + z^2 k;$
   e. $g = rc$, $r = \left|\overline{OM}\right|,\ \ c = const,\ \ M$ – довільна точка.
12. Довести, що поле потенційне. Знайти його потенціал:
   a. $P = 2xzi + y^2 j + x^2 k;$
   b. $P = \left(3x^2 y^2 z + y^2 z^3\right)i + \left(2x^3 yz + 2xyz^3\right) j + \left(x^3 y^2 + 3xy^2 z^2\right)k.$

13. Використовуючи теорему Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $a = z^2 j$ по кривій, утвореній перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ з координатними площинами першого октанту.

Тема 5. Символічні методи та операції другого порядку

Задачі для аудиторної роботи

1. Нехай $a,\ b$ – сталі вектори, $r = xi + yj + zk$. Знайти градієнт скалярних полів:
   a. $u = (a, r)$;
   b. $u = (a, r)(b, r)$;
   c. $u = \left| [a, r] \right|^2$.
2. Нехай b і c – сталі вектори, $r = xi + yj + zk$. Довести такі рівності:
   a. $div\, c(r, b) = (b, c)$;
   b. $div\, r(r, c) = 4(c, r)$;
   c. $div[b \times r] = 0$;
   d. $div r[b \times r] = 0$.
3. Довести символічним методом тотожності:
   a. $div[a \times b] = (b, rot\, a) - (a, rot\, b)$;
   b. $rot[a \times b] = a\, div\, b - b\, div\, a + (b, \nabla)a - (a, \nabla)b$;
   c. $grad(a, b) = [a, rotb] + [b, rota] + (a, \nabla)b + (b, \nabla)a$.

Задачі для самостійної роботи

1. Довести диференціальні властивості градієнта, якщо $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$, $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $C = const$:
   d. $grad\,(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1 grad\,\varphi_1 + C_2 grad\,\varphi_2$;
   e. $grad\,(\varphi\psi) = \psi\, grad\,\varphi + \varphi\, grad\,\psi$;
   f. $grad\,\dfrac{\varphi}{\psi} = \dfrac{\psi\, grad\,\varphi - \varphi\, grad\,\psi}{\psi^2}$;

g. $gradF(u)=\frac{dF}{du}grad\,u$;

h. $gradF(u,v)=\frac{dF}{du}grad\,u+\frac{dF}{dv}grad\,v$.

2. Нехай a, b і c – сталі вектори, $r = xi + yj + zk$. Знайти дивергенцію поля:

   i. $a=r^2c$;

   j. $P=\left[a\times[r\times b]\right]$;

   k. $a=\varphi(r)c$.

3. Нехай $r = xi + yj + zk$. Показати, що

   a. $rot(ra)=\frac{1}{r}[r\times a]+|r|rot\,a$;

   b. $rot\,r^3c=3r\left[r\times c\right]$, де c – сталий вектор;

   c. $rot(r,a)b=[a\times b]$, де a,b – сталі вектори;

   d. $div[a,b]=(rot\,a,b)-(a,rot\,b)$;

   e. $rot(ua)=u\,rot\,a+\left[grad\,u\times a\right]$, $u=u(x,y,z)$ – скалярна функція.

4. Символічним методом знайти $rot(\varphi a)$, де $\varphi=\varphi(x,y,z)$ – скалярне поле, а $a=a(x,y,z)$ – векторне поле.

5. Нехай c – сталий вектор, а $r = xi + yj + zk$. Знайти

   a. $div\,r[c\times r]$;

   b. $rot\left[r\times[c\times r]\right]$;

   c. $rot[c\times r]$.

Тема 6. Криволінійні системи координат

Задачі для аудиторної роботи

1. Записати вигляд операцій першого порядку та оператора Лапласа для:
   a. циліндричних координат;
   b. сферичних координат.

2. Довести, що векторне поле $a=\frac{2\cos\theta}{r^3}e_r+\frac{\sin\theta}{r^3}e_\theta$ є потенціальним.

3. Довести, що векторне поле $a = f\left(r\right)e_r$, де f – довільна диференційована функція, потенціальне в циліндричній та сферичній системі.
4. Знайти потік векторного поля $a = re_r - \cos\varphi e_\varphi + ze_z$, визначеного в циліндричних координатах, крізь замкнену поверхню, утворену циліндром $r = 2$ та площинами $z = 0$ та $z = 2$, у напрямку зовнішньої нормалі.
5. Знайти потік векторного поля $a = \frac{1}{r^2}e_r$, визначеного у сферичних координатах, крізь деяку замкнену поверхню, яка оточує початок координат у напрямку зовнішньої нормалі.
6. Довести, що векторне поле $a = re_r + \frac{\varphi}{r}e_\varphi + ze_z$, визначене у циліндричних координатах, є потенціальним та знайти його потенціал.
7. Знайти всі можливі гармонічні функції, які у сферичній системі координат:
   a. залежать лише від θ;
   b. залежать лише від φ.
8. Знайти потік векторного поля $a = r^2 e_r + R^2\cos\varphi e_\varphi$, визначеного у сферичних координатах, крізь сферу $r = R$.
9. Знайти потік векторного поля, визначеного у сферичних координатах, $a = re_r$, крізь замкнену поверхню, обмежену верхньою півсферою радіуса R та площиною $\theta = 0$.

Задачі для самостійної роботи

1. Записати вигляд операції першого порядку та оператора Лапласа для:
   a. еліптичних координат $x = c\lambda\mu$, $y = c\sqrt{\left(\lambda^2 - 1\right)\left(1 - \mu^2\right)}$, $z = z$, де c - масштабний множник;
   b. параболічних координат $\lambda = \sqrt{2r}\sin\frac{\varphi}{2}$, $\mu = \sqrt{2r}\cos\frac{\varphi}{2}$, $z = z$.
2. Знайти потік векторного поля $a = re_r + r\varphi e_\varphi - 2ze_z$, визначеного у циліндричних координатах, крізь замкнену поверхню, утворену циліндром $r = 1$, півплощинами $\varphi = 0$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і площинами $z = 0$ та $z = 1$, у напрямку зовнішньої нормалі.

3. Знайти потік векторного поля $a = re_r + r\sin\theta - 3r\varphi\sin\theta e_\varphi$, визначеного у сферичних координатах, крізь замкнену поверхню, обмежену верхньою напівсферою радіусу R та площиною $\theta = 0$.
4. Переконатись, що векторне поле $a = e_r + \dfrac{1}{r}e_\varphi + e_z$, визначене у циліндричних координатах, є потенціальним та знайти його потенціал.
5. Встановити, що поле, визначене у сферичних координатах, $a = \theta e_r + e_\theta$, є потенціальним та знайти його потенціал.

Тема 7. Гідромеханічне тлумачення аналітичних функцій

Задачі для аудиторної роботи

1. Дати гідромеханічне тлумачення полів, породжених комплексними потенціалами. Зобразити лінії течії та лінії сталого потенціалу:

   a. $f(z) = Ln\, z;$ b. $f(z) = Ln\dfrac{1}{z};$

   c. $f(z) = -i\, Ln\, z;$ d. $f(z) = \dfrac{P - iC}{2\pi} Ln\, z;$

   e. $f(z) = \dfrac{P}{2\pi} Ln\dfrac{z-a}{z-b};$ f. $f(z) = -\dfrac{iC}{2\pi} Ln\dfrac{z-a}{z-b}.$

2. Розглянути границю послідовності полів $f(z) = \dfrac{P - iC}{2\pi} Ln\dfrac{z-a}{z-b}$ при $b \to a$, якщо відомо, що $(P - iC)(b - a)$ прямує до обмеженої комплексної величини, відмінної від 0.
3. Знайти лінії течії рідини в областях, якщо при конформному відображенні цих областей на верхню півплощину отримуються горизонтальні лінії течії:

   a. $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\};$ b. $\{\operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, i];$

   c. $\{0 < \arg z < \alpha\};$ d. $\{Im\, z > 0\} \setminus [i, +i\infty];$

   e. $C \setminus ([-\infty, 1] \cup [1, +\infty]).$

Список літератури

1. Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теории поля. – Киев: Наукова думка, 1998.
2. Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Т.Н. Векторный анализ. – Москва: Наука, 1978.
3. Романовский М.Л. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – Москва: Наука, 1973.
4. Мышкис А.Д. Математика. Специальные курсы. – Москва: Наука, 1971.
5. Грищенко Ю.О., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Теорія функцій комплексної змінної. Розв’язування задач. – Київ: Вища школа, 1994.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966.
7. Креневич А.П., Ловейкін А.В. Основи векторного аналізу та теорії поля: Навчальний посібник – Київ: ВПЦ "Київський Університет", 2012.
8. Романенко І.Б., Креневич А.П. "Векторний аналіз та теорія поля". Навчально-методичні вказівки до практичних занять. – Київ: ВПЦ "Київський Університет", 2008.
9. Ландау А.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – Москва: Физматгиз, 1962.

Зміст