**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної фізики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заступник декана
з навчальної роботи

____

«____»____________2013 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

для студентів

галузі знань **0402 Фізико-математичні науки**

спеціальності 6.040201 – математика

КИЇВ – 2013

Робоча програма дисципліни «***Методи обчислень***» для студентів *галузі знань* 0402-фізико-математичні науки**,** *спеціальність 6.040201 – математика*.
«___» _____________ 2013 року - 36с.

Розробник: к.ф.-м.н., доцент **Довгий Борис Павлович**

Робоча програма дисципліни «***Методи обчислень***» затверджена на засіданні кафедри математичної фізики

Протокол № 10 від “09” квітня 2013 року

Завідувач кафедри _________________________ В.Г. Самойленко
(підпис)

«_____» ___________________ 2013 року

Схвалено науково - методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від «16» квітня 2013 року № 7

Голова науково-методичної комісії _________________________ О.О.Курченко
(підпис)

«_____» _________________ 2013 року

Вступ

Навчальна дисципліна "Методи обчислень" є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» з *напряму підготовки* – 0402 фізико-математичні науки, *спеціальності* **-** 6.040201 – математика.

Дана дисципліна нормативна за ***спеціальностями*** 6.040201 – математика. Викладається у **першому** та **другому** семестрі **4** курсу (VII-VIII семестр навчання) в обсязі **234 год**. (**6,5 кредитів** за ECTS), зокрема, *лекції* – 66 (34+32) *год*., *лабораторні роботи* – 49 (17+32) *год*., *самостійна робота* – 119 (57+62) *год*. У курсі передбачено 5 *змістовних модулв*. Завершується дисципліна – **заліком** у першому семестрі та **іспитом** у другому семестрі**.**

Мета дисципліни – оволодіти теоретичними основами методів обчислень, навчитись застосовувати методи обчислень до розв'язування конкретних задач, познайомитись з напрямами методів обчислень у зв'язку з використанням сучасної обчислювальної техніки і пакетів прикладних математичних програм.

Завдання – набуття студентами необхідних методичних та методологічних знань і теоретичних та практичних навичок дослідження та розв'язання прикладних задач з використанням сучасної обчислювальної техніки і створення відповідних програм як самостійно так і з допомогою математичних пакетів.

Курс складається з *п'яти змістових модулів*.

Перший модуль – чисельні методи в алгебрі: прямі і ітераційні методи розв`язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь; наближені методи розв`язування алгебраїчної проблема власних значень; методи розв`язування нелінійних рівнянь та їх систем.

Другий модуль – наближення функцій та операторів, а саме, побудова і застосування інтерполяційних многочленів, інтерполяційних сплайнів; чисельне диференціювання і інтегрування.

Третій модуль – побудова та застосування наближених методів для розв`язування задач Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Четвертий модуль – побудова різницевих задач для крайових задач диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема для одновимірних лінійних і нелінійних рівнянь переносу; одновимірних та багатовимірних параболічних та гіперболічних рівнянь; квазілінійних рівнянь типу Шредінгера; еліптичних рівнянь, а також застосування ефективних методів для розв'язання отриманих різницевих задач. Застосування методу Роте для розв'язування нестаціонарних крайових задач математичної фізики з системою різнотипових рівнянь.

П'ятий модуль – Методи розв'язування коректно поставлених лінійних інтегральних рівнянь.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- поняття похибки обчислень;
- основні методи (прямі та ітераційні) розв'язання систем лінійних рівнянь;
- основні ітераційні методи розв'язання нелінійних рівнянь і систем;
- представлення інтерполяційних поліномів в формі Лагранжа і Ньютона та їх застосування;
- основні методи побудови формул чисельного диференціювання і дослідження похибки;
- знаходження головного члена похибки і побудова нових розрахункових формул на основі формул Рунге-Ромберга;
- формули чисельного інтегрування (прямокутників, трапецій, Сімпсона) і їх похибка на частинному інтервалі і складені формули;
- побудову інтерполяційних квадратурних формул найвищого алгебраїчного степеня точності, використання формул Гаусса-Крістоффеля;
- методи побудови різницевих і методів типу Рунге-Кутта розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР);
- поняття збіжності і порядку чисельного методу в точці, на відрізку; стійкість: умовна і абсолютна; поняття "жорсткості" систем ЗДР;
- метод редукції до задачі Коші для розв'язування крайових задач ЗДР;
- проекційні методи розв'язування крайових задач ЗДР;
- варіаційні методи розв'язування крайових задач ЗДР;
- основні методи побудови і дослідження РЗ для крайових задач ЗДР;
- основні методи побудови різницевих схем (РС) для диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП);
- основні методи побудови РС для крайових і початкових умов в мішаних крайових задачах для ДРЧП;
- поняття стійкості, збіжності, консервативності РЗ;
- основні методи дослідження різницевих задач;
- локально-одновимірні РС для багатовимірних задач параболічного і гіперболічного типу;
- метод Роте для нестаціонарних нелінійних систем різнотипових рівнянь.
- основні методи розв'язування коректно поставлених лінійних інтегральних рівнянь.

вміти:

- використовувати методи обчислень при розв'язуванні задач алгебри;
- використовувати методи обчислень при розв'язуванні задач теорії функцій;

- використовувати методи обчислень при розв'язуванні задач диференціальних та інтегральних рівнянь;
- використовувати методи обчислень при розв'язуванні крайових задач математичної фізики.

Місце дисципліни в системі підготовки фахівців з математики: навчальна дисципліна "Методи обчислень" є однією із ключових складових комплексної підготовки бакалаврів напряму підготовки "Математика", "Статистика".

Зв'язок з іншими дисциплінами. Навчальна дисципліна "Методи обчислень" базується на циклі дисциплін професійної та практичної підготовки, зокрема "Математичний аналіз", "Лінійна алгебра", "Аналітична геометрія", "Диференціальні рівняння", "Теорія функція комплексної змінної", "Функціональний аналіз", "Рівняння математичної фізики", "Програмне забезпечення сучасних персональних комп'ютерів", "Інформатика та програмування", "Прикладні програми".

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1 – 3, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) – теми 4 – 7. Обов'язковим для заліку в першому семестрі є виконання модульних контрольних робіт, а також домашніх лабораторних завдань, передбачених робочою програмою навчальної дисципліни після вивчення тем 1-2, 3, 7.

У змістовий модуль 3 (ЗМ3) входять теми 8 – 9, у змістовий модуль 4 (ЗМ4) – теми 10 – 14, у змістовний модуль 5 (ЗМ5) – тема 15. Обов'язковим для іспиту в другому семестрі є виконання модульних контрольних робіт, а також домашніх лабораторних завдань, передбачених робочою програмою навчальної дисципліни після вивчення тем 8, 9,11, 13.

Оцінювання (рейтинг) кожної МКР здійснюється у відповідності із її складністю.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до «Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу» від 1 жовтня 2010 року.

Загальний рейтинг навчальної діяльності студентів в кожному семестрі – сума рейтингу виконаних домашніх самостійних завдань та МКР не може перевищувати 60 балів. Надлишок балів може враховуватись під час екзамену (заліку).

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100-бальною шкалою за кожний семестр.

Форми поточного контролю: опитування на лекціях, відповіді на лабораторних заняттях, перевірка виконання домашніх лабораторних завдань, письмові самостійні роботи.

Модульний контроль: модульна контрольна робота.

Підсумковий контроль: в першому семестрі- залік, в другому- екзамен.

Студент не допускається до складання заліку, іспиту, якщо кількість балів, одержаних за змістовні модулі (поточний контроль) упродовж семестру нижча, ніж *критично-розрахунковий мінімум - 35 балів*, і зобов'язаний виконати завдання, запропоновані викладачем в рамках курсу "Методи обчислень" для отримання мінімально-допустимої оцінки 35 балів.

При наявності "непрохідного мінімуму" напередодні іспиту видається розпорядження по факультету і студент не допускається до складання іспиту, як такий, що не виконав навчальний план. На день складання іспиту студенту на іспиті виставляється "не допущений".

Семестровий контроль у формі іспиту проводиться у змішаній формі (письмово-усній). На іспит виносяться теоретичні питання по програмі курсу, типові і комплексні задачі.

Перелік екзаменаційних питань та завдань/екзаменаційних білетів затверджуються на засіданні кафедри і включаються до робочої навчальної програми дисципліни.

Форма проведення іспиту/заліку з навчальної дисципліни:

1. Залік, іспит з дисципліни "Методи обчислень" є формою семестрового контролю з вказаної дисципліни.
2. Формою проведення заліку, іспиту є письмово-усна.
3. Перед початком заліку, іспиту в екзаменаційній відомості проставляється кількість балів, отриманих студентами за змістовні модулі під час навчання.
4. Перед початком заліку, іспиту до відома студентів доводиться критерій оцінювання .
5. Письмова частина іспиту складається з трьох питань, перші два – теоретичні, третє – задача.
6. Тривалість роботи над письмовою частиною іспиту складає 45 хвилин.
7. Усна частина проходить у формі діалогу і включає відповіді студента на питання екзаменатора, які стосуються письмової роботи студента.
8. Оцінювання:

    1. 1-2 питання екзаменаційного білету оцінюється максимально у 13 балів: студент повинен вміти чітко формулювати теореми, досить детально у певній логічній послідовності доводити і обґрунтовувати наведені твердження і робити потрібні висновки.
    2. 3 питання екзаменаційного білету оцінюється максимально у 14 балів: студент повинен вміти застосовувати відповідні методи для розв'язування запропонованої задачі, формулювати алгоритмічний підхід до розв'язку.

При необхідності викладач може поставити студенту додаткове питання в рамках курсу, яке оцінюється максимально в 5 балів, але так, щоб сумарна оцінка за іспит не перевищувала максимально допустиму оцінку 40 балів. За результатами навчання студент отримує підсумкову екзаменаційну оцінку за 100-бальною шкалою.

Оцінювання за формами контролю:

1 семестр 4 курсу

		ЗМ1		***ЗМ2***	
		Min. – 21 балів	*Max. – 35 балів*	*Min. – 15 балів*	*Max. – 25 балів*
Усна відповідь		***„0,5”*** * *1*= **0,5**	***„1”*** * *2*= **2**	***„0,5”*** * *1*= **0,5**	***„1”*** * 3 = **3**
Доповнення		***„0,5”*** * *1* = **0,5**	***„0,5”*** * *2* = **1**	***„0,5”*** * *1* = **0,5**	***„0,5”*** * *2* = **1**
Виконання домашніх самостійних завдань	Тема 1-2	***„4”*** * *1* = **4**	***„6”*** * *1* = **6**		
	Тема 3	***„4”*** * *1* = **4**	***„6”*** * *1* = **6**		
	Тема 7			***„4”*** * *1* = **4**	***„6”*** * *1* = **6**
Модульна контрольна робота		***„12”*** * 1 = **12**	***„20”*** * 1= **20**	***„10”*** * 1 = **10**	***„15”*** * 1=**15**
„3” – мінімальна/максимальна оцінка, яку може отримати студент. [1] – мінімальна/максимальна залікова кількість робіт чи завдань.					

2 семестр 4 курсу

		ЗМ3		***ЗМ4***		***ЗМ5***	
		Min. – 15 балів	*Max. – 22 бали*	*Min. – 15 балів*	*Max. – 22 бали*	*Min. – 11 балів*	*Max. – 16 балів*
Усна відповідь		***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**
Доповнення		***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**	***„0,5”***1* = **0,5**
Виконання домашніх самостійних завдань	Тема 8	***„2”*** * 1 = **2**	***„3”*** * 1 = **3**				
	Тема 9	***„2”*** * 1 = **2**	***„3”*** * 1 = **3**				
	Тема 11			***„2”*** * 1 = **2**	***„3”*** * 1 = **3**		
	Тема 13			***„2”*** * 1 = **2**	***„3”*** * 1 = **3**		
Модульна контрольна робота		***„10”**** 1 = **10**	***„15”**** 1= **15**	***„10”**** 1 = **10**	***„15”**** 1= **15**	***„10”**** 1 = **10**	***„15”**** 1= **15**
„3” – мінімальна/максимальна оцінка, яку може отримати студент. [1] – мінімальна/максимальна залікова кількість робіт чи завдань.							

При простому розрахунку отримаємо:

1 семестр

	ЗМ1	ЗМ2	залік	Підсумкова оцінка
Мінімум	*21*	*15*	*24*	*60*
Максимум	**35**	**25**	**40**	**100**

2 семестр

	ЗМ3	ЗМ4	ЗМ5	Іспит	Підсумкова оцінка
Мінімум	*15*	*15*	*11*	*19*	*60*
Максимум	**22**	**22**	**16**	**40**	**100**

Підсумкова оцінка з дисципліни проставляється в екзаменаційній відомості у балах і за національною шкалою оцінок згідно із наведеною нижче шкалою відповідності

Шкала відповідності *(за умови іспиту)*

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	відмінно
85 – 89	4	добре
75 – 84		
65 – 74	3	задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	незадовільно
1 – 34		

Шкала відповідності *(за умови заліку)*

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В АЛГЕБРІ.

ТЕМА № 1. Чисельні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (16 год.)

Введення в дисципліну. Класифікація похибок, дії з наближеними величинами. Визначення прямих методів розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Метод Гаусса (схема оптимального виключення), метод Халецького, метод квадратного кореня, метод прогонки та теорема про його коректність. Порівняння використання методу Гаусса: точний виконавець і виконавець з урахуванням похибки заокруглення при фіксованій мантисі числа.

Ітераційні уточнення в прямих методах. Вплив похибок вхідних даних на розв'язок СЛАР. Обумовленність СЛАР.

Принцип побудови ітераційних процесів (ІП) для СЛАР. Стаціонарні, нестаціонарні, однокрокові і багатокрокові ІП, канонічна форма двокрокових ІП. Метод простої ітерації і метод Зейделя для СЛАР, умови збіжності та оцінки похибок цих методів. Методи: оптимальний лінійний ІП, Річардсона, релаксації, найшвидшого спуску.

ТЕМА № 2. Чисельні методи розв'язування алгебраїчної проблеми власних значень (8 год.)

Повна і часткова проблема власних значень. Огляд методів для отримання характеристичного поліному. Степенево-ітераційні методи розв'язування часткової проблеми власних значень. Збіжність методу. Метод скалярних добутків. Обернені ітерації з зсувом для знаходження $\min_i |\lambda_i(A)|$. Алгоритми знаходження $|\lambda_2(A)|$. Метод обертань розв'язання повної проблеми власних значень для симетричних матриць. Збіжність методу.

ТЕМА № 3. Чисельні методи розв'язування нелінійних рівнянь та їх систем (8 год.)

Загальна технологія наближеного розв'язку нелінійного рівняння. Основні поняття ІП. Метод дихотомії та оцінка його збіжності. Метод простої ітерації, теорема про збіжність та оцінка його збіжності. Метод простої ітерації для систем нелінійних рівнянь. Метод Ньютона, теорема про збіжність та оцінка його збіжності. Модифікації методу Ньютона: січних, хорд та оцінка збіжності. Приклад ІМ з нецілим порядком – метод Курчатова. Метод Ньютона для систем нелінійних рівнянь.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ОПЕРАТОРІВ.

ТЕМА № 4. Інтерполяційні многочлени (12 год.)

Інтерполяційний поліном в формі Лагранжа. Поділені різниці та їх властивості. Інтерполяційний поліном в формі Ньютона. Похибка інтерполяційного поліному. Інтерполювання при рівновіддалених вузлах. Многочлени, що найменше відхиляються від нуля. Мінімізація залишка інтерполювання. Про збіжність інтерполяційних многочленів. Поняття про інтерполювання з кратними вузлами. Інші методи інтерполяції.

Загальна постановка задачі інтерполювання. Поняття про найкраще рівномірне наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами. Середньоквадратичне наближення функцій, заданих таблицею. Узагальнені многочлени. Інтерполювання функцій. Системи Чебишева. Узагальнена теорема Ролля. Необхідні та достатні умови систем Чебишова. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі інтерполювання функцій.

ТЕМА № 5. Інтерполяційні сплайни (9 год.)

Поняття сплайн-функції. Інтерполяційні сплайн-функції. Збіжність сплайн-функцій. Крайові умови інтерполяційних сплайн-функцій. Екстремальні властивості кубічних сплайнів. Побудова інтерполяційних сплайнів. Форми представлення інтерполяційних сплайн-функцій. Побудова СЛАР для визначення коефіцієнтів інтерполяційних сплайн-функцій та її розв'язування. Використання інтерполяційних сплайн-функцій.

ТЕМА № 6. Чисельне диференціювання (6 год.)

Постановка задачі чисельного диференціювання. Поняття апроксимації та її порядку. Побудова найпростіших формул для першої та другої похідної з рівно-мірним кроком. Метод Коллатца побудови дискретних аналогів диференціальних операторів. Проблеми коректності задачі чисельного диференціювання. Знаходження оптимального кроку чисельного диференціювання. Формули Рунге-Ромберга.

ТЕМА № 7. Чисельне інтегрування (13 год.)

Визначення інтерполяційних квадратурних формул. Огляд існуючих методів побудови квадратурних формул. Найпростіші квадратурні формули (прямо-кутників, трапецій, Сімпсона) і оцінка похибки. Узагальнені квадратурні формули та їх похибки. Використання формул Рунге-Ромберга для апостеріорної оцінки похибки обчислення інтегралу.

Теорема про інтерполяційні квадратурні формули. Побудова квадратурних формул. Теореми про оцінку похибки інтерполяційних квадратурних формул. Симетричні квадратурні формули. Формули Ньютона-Котеса. Обчислювальна стійкість квадратурних формул.

Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності (КФНАСТ). Теорема про КФНАСТ. Теореми про оцінку похибки КФНАСТ. Властивість КФНАСТ. Використання ортогональних систем многочленів Лежандра, Чебишева, Чебишева-Лагерра, Чебишева-Ерміта для побудови формул Гаусса-Крістоффеля.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

ТЕМА № 8. Методи розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (20 год.)

Огляд чисельно-аналітичних і чисельних методів. Різницеві однокрокові методи: явний і неявний метод Ейлера, симетрична схема. Поняття збіжності при $h \to 0$. Загальний підхід до побудови багатокрокових методів.

Методи типу Рунге-Кутта. Поправка Рунге-Ромберга.

Багатокрокові методи розв`язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Стійкість і збіжність.

Методи типу Адамса. Побудова екстраполяційних і інтерполяційних формул та оцінка похибки методів типу Адамса.

Основні поняття стійкості по початковим даним і по правій частині. Збіжність. Стійкість умовна і абсолютна. Поняття «жорстких» систем диференціальних рівнянь.

ТЕМА № 9. Методи розв’язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь (48 год.)

Постановка задачі. Метод редукції до задач Коші для лінійного рівняння другого порядку і для лінійної системи *n* рівнянь.

Загальний алгоритм застосування методу скінченних різниць (МСР) для крайових задач. Основні поняття теорії різницевих схем (РС). Приклад застосування МСР для лінійних і квазілінійних крайових задач для ЗДР.

Рівномірна і нерівномірна сітка. Використання формул чисельного диференціювання для отримання різницевої задачі. Оцінка похибки апроксимації (локальної і на сітці). Методи підвищення порядку апроксимації. Дослідження стійкості і збіжності. Методи розв’язування відповідної СЛАР і нелінійної системи.

Інтегро-інтерполяційний метод (ІІМ) побудови РЗ для крайових задач ЗДР з розривними коефіцієнтами. Застосування ІІМ побудови РС на прикладі лінійного ЗДР з розривними коефіцієнтами. Апроксимація крайових умов з допомогою ІІМ.

Чисельні методи розв`язування задач на власні значення для ЗДР. Різницевий метод для задач Штурма-Ліувілля. Метод доповненого вектора.

Метод скінчених елементів розв`язування крайових задач для ЗДР. Варіаційно-різницеві методи. Елементи області та апроксимація шуканої функції. Метод скінчених елементів на прикладі несамоспряженної крайової задачі для рівняння другого порядку.

Проекційні і варіаційні методи розв`язування крайових задач для ЗДР. Координатна та проекційна системи функцій. Метод моментів. Метод Гальоркіна. Метод колокації. Зв’язок задачі мінімізації квадратичного функціоналу та крайової задачі. Метод Рітца. Метод найменших квадратів.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ.

ТЕМА № 10. Одновимірні рівняння переносу (16 год.)

Метод Роте для нестаціонарних рівнянь та систем різнотипових рівнянь.

Метод скінчених різниць для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Методи дослідження стійкості та збіжності РС. РС для одновимірних рівнянь переносу та їх аналіз. Побудова консервативної РС для нелінійного рівняння переносу.

ТЕМА № 11. Параболічні рівняння (24 год.)

Побудова та дослідження апроксимації, стійкості та збіжності явних та неявних РС для одновимірних параболічних рівнянь. РС підвищенного порядку апроксимації. Дискретизація крайових умов.

РС двовимірних параболічних рівнянь. Економні РС. Повздовж-поперечна РС та її дослідження.

РС багатовимірних параболічних рівнянь. Локально-однорідна РС та її дослідження.

ТЕМА № 12. Рівняння типу Шредінгера (8 год.)

Нелінійні рівняння типу Шредінгера. РС з ваговим коефіцієнтом. Особливість РС для рівняння типу Шредінгера. Дослідження лінійних РС для рівняння типу Шредінгера. Приклад побудови повністю консервативної РС для двовимірного квазілінійного рівняння типу Шредінгера з нелінійністю певного типу.

Одновимірні лінійні рівняння типу Шредінгера для циліндричної системи координат.

ТЕМА № 13. Еліптичні рівняння (14 год.)

Побудова та дослідження апроксимації, стійкості та збіжності РС для еліптичних рівнянь в прямокутній області. Метод Зейделя розв’язання відповідної СЛАР. Зведення крайової задачі для еліптичних рівнянь до послідовності задач параболічного типу. Використання економних РС.

ТЕМА № 14. Гіперболічні рівняння (14 год.)

Побудова та дослідження апроксимації, стійкості та збіжності РС з ваговим коефіцієнтом для одновимірних гіперболічних рівнянь. Особливість РС для гіперболічних рівнянь. РС багатовимірних гіперболічних рівнянь. Локально-однорідна РС.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

ТЕМА № 15. Методи розв’язування коректно поставлених лінійних інтегральних рівнянь (18 год.)

Лінійні інтегральні рівняння ІІ роду.Метод колокації, квадратурних формул, заміни ядра виродженим, сплайн-апроксимації.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Семестр І

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лек-ції	**Лабо-раторні заняття**	**Само-стійна робота**
	Модуль 1. Чисельні методи в алгебрі			
1.	Чисельні методи розв`язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь	8	4	4
2.	Чисельні методи розв`язування алгебраїчної проблема власних значень	4	2	2
3.	Чисельні методи розв`язування нелінійних рівнянь та їх систем	4	2	2
	Модуль 2. Наближення функцій та операторів			
4.	Інтерполяційні многочлени	6	2	4
5.	Інтерполяційні сплайни	4	2	3
6.	Чисельне диференціювання	2	2	2
7.	Чисельне інтегрування	6	3	4
	Всього годин за семестр 72, з них	34	17	21

Семестр ІІ

	Модуль ІІІ. Звичайні диференціальні рівняння			
8.	Методи розв`язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь	4	4	12
9.	Методи розв`язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь	12	10	26
	Модуль IV. Диференціальні рівняння з частинними похідними			
10.	Одновимірні рівняння переносу	2	2	12
11.	Параболічні рівняння	6	6	12
12.	Рівняння типу Шредінгера	2	2	4

13.	Еліптичні рівняння	2	2	10
14.	Гіперболічні рівняння	2	2	10
Модуль V. Інтегральні рівняння				
15.	Методи розв'язування коректно поставлених лінійних інтегральних рівнянь	2	4	12
Всього годин за семестр 162, з них		32	32	98

ТЕМИ ЛЕКЦІЙ, ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ ТА ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. Чисельні методи в алгебрі

Тема №1. Чисельні методи розв`язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Лекція 1-3. Прямі методи розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь – 6 год.

Введення в дисципліну. Класифікація похибок, дії з наближеними величинами.

Визначення прямих методів розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Метод Гаусса (схема оптимального виключення), метод Халецького, метод квадратного кореня, метод прогонки та теорема про його коректність.

Порівняння використання методу Гаусса: точний виконавець і виконавець з урахуванням похибки заокруглення при фіксованій мантисі числа.

Ітераційні уточнення в прямих методах.

Вплив похибок вхідних даних на розв'язок СЛАР. Обумовленність СЛАР.

Лекція 4. Ітераційні методи розв’язування СЛАР – 2 год.

Принцип побудови ітераційних процесів. Стаціонарні, нестаціонарні, однокрокові і багатокрокові ітераційні процеси. Канонічна форма двокрокових ІП. Метод простої ітерації і метод Зейделя для СЛАР, умови збіжності та оцінки похибок цих методів.

Лабораторні роботи - 4 год.

ЛР 1. – Прямі методи розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. – 2 год.

Метод Гаусса (схема оптимального виключення), метод квадратного кореня, метод прогонки.

ЛР 2. – Ітераційні методи розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. – 2 год.

Метод простої ітерації і метод Зейделя для систем лінійних алгебраїчних рівнянь, умови збіжності та оцінки похибок цих методів

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 1-4 - 4 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Методи: Якобі, Річардсона, релаксації, найшвидшого спуску.
3. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Прямі методи розв’язування СЛАР;

– Ітераційні методи розв’язування СЛАР;

Література: [1], [4], [7], [11], [13].

Тема №2. Чисельні методи розв`язування алгебраїчної проблема власних значень.

Лекція 5. Чисельні методи розв`язування часткової алгебраїчної проблема власних значень –2 год.

Повна і часткова проблема власних значень. Огляд методів для отримання характеристичного поліному. Степенево-ітераційні методи розв'язування часткової проблеми власних значень. Збіжність методу. Метод скалярних добутків. Обернені ітерації з зсувом для знаходження $\min_i |\lambda_i(A)|$. Алгоритми знаходження $|\lambda_2(A)|$.

Лекція 6. Чисельні методи розв`язування повної алгебраїчної проблеми власних значень – 2 год.

Метод обертань розв'язування повної проблеми власних значень для симетричних матриць. Збіжність методу.

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 3. – Чисельні методи розв’язування часткової алгебраїчної проблема власних значень – 2 год.

Степенево-ітераційні методи розв'язування часткової проблеми власних значень. Збіжність методу. Метод скалярних добутків.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 5-6 - 2 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Методи розкриття характеристичного рівняння (Данилевського, Левер’є, Крилова, невизначених коефіцієнтів).
   – Повна і часткова проблема власних значень.

Література: [7], [11], [13].

Тема №3. Чисельні методи розв`язування нелінійних рівнянь та їх систем.

Лекція 7. Чисельні методи розв`язування нелінійних рівнянь – 2 год.

Загальна технологія наближеного розв’язку нелінійного рівняння. Основні поняття ІП. Метод дихотомії та оцінка його збіжності. Метод простої ітерації, теорема про збіжність та оцінка його збіжності. Нестаціонарні ІП - Ейткена-Стеффенсена. Метод простої ітерації для систем нелінійних рівнянь.

Лекція 8. Чисельні методи розв`язування нелінійних рівнянь та їх систем – 2 год.

Метод Ньютона, теорема про збіжність та оцінка його збіжності. Модифікації методу Ньютона: січних, хорд та оцінка збіжності. Приклад ІМ з нецілим порядком – метод Курчатова. Метод Ньютона та його модифікації для систем нелінійних рівнянь.

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 4. – Чисельні методи розв`язування нелінійних рівнянь – 2 год.

Методи: дихотомії, простої ітерації, Ейткена-Стеффенсена. Метод Ньютона та його модифікації: січних, хорд.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 7-8 - 2 год.

У тому числі

3. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
4. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Розв`язування нелінійних рівнянь та їх систем..

Література: [7], [11], [13].

Питання до змістовного модуля 1

1. Означення прямих методів розв’язування СЛАР.
2. Метод Гаусса (схема оптимального виключення).
3. Метод Халецького.
4. Метод квадратного кореня.
5. Метод монотонної прогонки та умови його коректності.
6. Ітераційні уточнення в прямих методах.
7. Обумовленість СЛАР.
8. Стаціонарні, нестаціонарні, однокрокові і багатокрокові ІП.
9. Канонічна форма двокрокових ІП.
10. Метод простої ітерації для СЛАР, умова збіжності та оцінка похибки.
11. Метод Зейделя для СЛАР, умова збіжності та оцінка похибки.
12. Оптимальний лінійний ІП.
13. Метод Річардсона, поняття про оптимальний набір ітераційних параметрів.
14. Метод релаксації.
15. Метод найшвидшого спуску.
16. Постановка задачі про повну і часткову проблему власних значень.
17. Степенево-ітераційні методи розв'язування часткової проблеми власних значень. Метод скалярних добутків.
18. Обернені ітерації з зсувом для знаходження $\min_i |\lambda_i(A)|$.
19. Алгоритми знаходження $|\lambda_2(A)|$.
20. Метод обертань розв'язання повної проблеми власних значень для симетричних матриць.
21. Метод дихотомії для розв’язування нелінійного рівняння.
22. Метод простої ітерації для нелінійного рівняння, теорема про збіжність та оцінка його збіжності.
23. Метод простої ітерації для систем, теорема про збіжність та оцінка його збіжності.

24. Метод Ньютона, теорема про збіжність та оцінка його збіжності.
25. Модифікації методу Ньютона: січних, хорд та оцінка збіжності.
26. Метод Ньютона та його модифікації для систем нелінійних рівнянь.

Приклад модульної контрольної роботи

1. **(10 балів)** Дана СЛАР

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1000001 & 1 \end{array}\right)$$

Розв'язати прямими методами:

Гаусса з оптимальним вибором по стовбцю; Халецького; метод прогонки.

Ітераційними методом Зейделя знайти друге наближення та оцінити його похибку:

Ітераційним методом найшвидшого спуску знайти перше наближення.

Вказати умови закінчення ітерацій для МПІ і Зейделя для точності = 1e-3.

Представити МПІ і метод Зейделя в канонічній формі.

Записати метод релаксації в покомпонентній формі.

2. **(4 бали)** Для матриці з п.1 знайти максимальне по модулю власне число і відповідний вектор з точністью = 0.1. (Порівняти звичайний варіант і варіант з симетричною матрицею).
3. **(2 бали)** Для матриці з п.1 знайти друге наближення для мінімального по модулю власного числа.
4. **(4 бали)** Для функції ***f(x)= x^3+cos(x)*** знайти друге наближення кореня рівняння ***f(x)=0*** ітераційними методами: дихотомії; простої ітерації; Ньютона; Ейткена-Стеффенсена. Записати умову закінчення ітерацій для точності = 1e-4.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІ. Наближення функцій та операторів

Тема №4. Інтерполяційні многочлени.

Лекція 9. Інтерполяційні многочлени – 2 год.

Інтерполяційний поліном в формі Лагранжа. Поділені різниці та їх властивості. Інтерполяційний поліном в формі Ньютона. Похибка інтерполяційного поліному. Інтерполювання при рівновіддалених вузлах.

Лекція 10. Мінімізація залишка інтерполювання– 2 год.

Многочлени, що найменше відхиляються від нуля. Мінімізація залишка інтерполювання. Про збіжність інтерполяційних многочленів. Поняття про інтерполювання з кратними вузлами. Інші методи інтерполяції.

Лекція 11. Загальна постановка задачі інтерполювання – 2 год.

Поняття про найкраще рівномірне наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами. Середньоквадратичне наближення функцій, заданих таблицею Узагальнені многочлени. Інтерполювання функцій. Системи Чебишева. Узагальнена теорема Ролля. Необхідні та достатні умови систем Чебишова. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі інтерполювання функцій.

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 5. Інтерполяційні многочлени – 2 год.

Інтерполяційний поліном в формі Лагранжа. Поділені різниці та їх властивості. Інтерполяційний поліном в формі Ньютона. Похибка інтерполяційного поліному. Інтерполювання при рівновіддалених вузлах.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 9-11 - 4 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:

– Інтерполювання многочленами.

Література: [4], [7], [11], [13].

Тема №5. Інтерполяційні сплайни.

Лекція 12. Сплайн-функції та їх властивості – 2 год.

Поняття сплайн-функції. Інтерполяційні сплайн-функції. Збіжність сплайн-функцій. Крайові умови інтерполяційних сплайн-функцій. Екстремальні властивості кубічних сплайнів.

Лекція 13. Побудова інтерполяційних сплайнів – 2 год.

Форми представлення інтерполяційних сплайн-функцій. Побудова СЛАР для визначення коефіцієнтів інтерполяційних сплайн-функцій та її розв’язування.

ЛР 6. Інтерполяційні сплайн-функції – 2 год.

Побудова та використання інтерполяційних сплайн-функцій.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 12-13 - 3 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:

– Інтерполювання сплайн-функціями.

Література: [5], [11], [13], [14], [16], [17].

Тема №6. Чисельне диференціювання.

Лекція 14. – Чисельне диференціювання – 2 год.

Постановка задачі чисельного диференціювання. Поняття апроксимації та її порядку. Побудова найпростіших формул для першої та другої похідної з рівномірним кроком. Метод Коллатца побудови дискретних аналогів диференціальних операторів. Проблеми коректності задачі чисельного диференціювання. Знаходження оптимального кроку чисельного диференціювання. Формули Рунге-Ромберга.

ЛР 7. Чисельне диференціювання – 2 год.

Побудова та використання формул чисельного диференціювання.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 14 - 2 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Чисельне диференціювання.

   Література: [6], [11], [13].

Тема №7. Чисельне інтегрування.

Лекція 15. Квадратурні формули – 2 год.

Визначення інтерполяційних квадратурних формул. Огляд існуючих методів побудови квадратурних формул. Найпростіші квадратурні формули (прямокутників, трапецій, Сімпсона) і оцінка похибки. Узагальнені квадратурні формули та їх похибки. Використання формул Рунге-Ромберга для апостеріорної оцінки похибки обчислення інтегралу.

Лекція 16. Квадратурні формули інтерполяційного типу – 2 год.

Теорема про інтерполяційні квадратурні формули. Побудова квадратурних формул. Теореми про оцінку похибки інтерполяційних квадратурних формул. Симетричні квадратурні формули. Формули Ньютона-Котеса. Обчислювальна стійкість квадратурних формул.

Лекція 17. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності. – 2 год.

Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності (КФНАСТ). Теорема про КФНАСТ. Теореми про оцінку похибки КФНАСТ. Властивість КФНАСТ. Використання ортогональних систем многочленів Лежандра, Чебишева, Чебишева-Лагерра, Чебишева-Ерміта для побудови формул Гаусса-Крістоффеля.

ЛР 8. Чисельне інтегрування – 3 год.

Побудова та використання формул чисельного інтегрування.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 15-17 - 4 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Чисельне інтегрування.

   Література: [2], [11], [13], [15].

Питання до змістовного модуля 2

1. Інтерполяційний поліном в формі Лагранжа.
2. Поділені різниці та їх властивості.
3. Інтерполяційний поліном в формі Ньютона.
4. Похибка інтерполяційного поліному.

5. Збіжність інтерполяційних многочленів.
6. Поняття про інтерполювання з кратними вузлами.
7. Загальна постановка задачі інтерполювання.
8. Поняття про найкраще рівномірне наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами.
9. Середньоквадратичне наближення функцій, заданих таблицею.
10. Системи Чебишева.
11. Необхідні та достатні умови систем Чебишова.
12. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі інтерполювання функцій.
13. Поняття сплайн-функції, інтерполяційні сплайн-функції і їх збіжність.
14. Крайові умови інтерполяційних сплайн-функцій.
15. Постановка задачі чисельного диференціювання.
16. Поняття апроксимації та її порядку.
17. Найпростіші формули чисельного диференціювання для першої та другої похідної з рівномірним кроком.
18. Метод Коллатца побудови дискретних аналогів диференціальних операторів.
19. Проблеми коректності задачі чисельного диференціювання.
20. Оптимальний крок чисельного диференціювання.
21. Формули Рунге-Ромберга.
22. Визначення інтерполяційних квадратурних формул.
23. Квадратурні формули прямокутників і оцінка похибки.
24. Квадратурні формули трапецій і оцінка похибки.
25. Квадратурні формули Сімпсона і оцінка похибки.
26. Узагальнені квадратурні формули та їх похибки.
27. Використання формул Рунге-Ромберга для апостеріорної оцінки похибки обчислення інтегралу.
28. Алгоритм побудови квадратурних формул.
29. Обчислювальна стійкість квадратурних формул.
30. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності.

Приклад модульної контрольної роботи

1. **(8 балів)** Задано 3 точки на площині ***x0y*** :

M1(-0.1,0.0253), M2(0.1,-0.0247), M3(0.3,-0.0723).

Побудувати інтерполяційний поліном у формі Лагранжа для знаходження значення функції $y(x)$ при ***x***=0.

Побудувати інтерполяційний поліном у формі Ньютона для знаходження значення функції $x(y)$ при ***y***=0.

Побудувати дробово-лінійну інтерполяційну функцію $\varphi(x) = \dfrac{a_1 x + a_0}{x + b_0}$, таку, що $\varphi(x_i) = y(x_i), i = 1,2,3$.

2. **(2 бали)** Задано 4 точки $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$**.** Знайти похибку апроксимації для $u'(x_0)$ різницевим виразом $(6h)^{-1}(-11u_0 + 18u_1 - 9u_2 + 2u_3)$.
3. **(5 бали)** Використовуючи формулу лівих прямокутників і формули Рунге-Ромберга побудувати квадратурну формулу для обчислення інтеграла на [*a,b*]. Визначити обчислювальну стійкість отриманої формули.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ III. Звичайні диференціальні рівняння

Тема №8. Методи розв`язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Лекція 18. Методи розв`язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) – 2 год

Огляд чисельно-аналітичних і чисельних методів. Різницеві однокрокові методи: явний і неявний метод Ейлера, симетрична схема. Поняття збіжності при $h \to 0$. Загальний підхід до побудови багатокрокових методів. Методи типу Рунге-Кутта. Поправка Рунге-Ромберга.

Лекція 19. Багатокрокові методи розв`язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Стійкість і збіжність. – 2 год.

Методи типу Адамса. Побудова екстраполяційних і інтерполяційних формул та оцінка похибки методів типу Адамса для ***m=2***.

Основні поняття стійкості по початковим даним і по правій частині. Збіжність. Стійкість умовна і абсолютна. Поняття «жорстких» систем диференціальних рівнянь.

Лабораторні роботи - 4 год.

ЛР 9. Однокрокові методи розв`язування задач Коші для ЗДР. .– 2 год.

Метод Пікара, степеневий метод, методи типу Рунге-Кутта. Поправка Рунге-Ромберга.

ЛР 10. Багатокрокові методи розв`язування задач Коші для ЗДР.– 2 год.

Методи типу Адамса. Побудова екстраполяційних і інтерполяційних формул та оцінка похибки методів типу Адамса для ***m=1,3***.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 18-19 - 12 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   - Задача Коші для ЗДР. Однокрокові методи
   - Задача Коші для ЗДР. Багатокрокові методи

Література: [2], [8], [11], [13].

Тема №9. Методи розв`язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Лекція 20. Різницеві методи розв`язування крайових задач для ЗДР – 2 год.

Постановка задачі. Метод редукції до задачі Коші для лінійного рівняння другого порядку і для лінійної системи *n* рівнянь.

Загальний алгоритм застосування МСР для крайових задач. Основні поняття теорії різницевих схем (РС).

Лекція 21. Приклад застосування МСР для лінійних і квазілінійних крайових задач для ЗДР – 2 год.

Рівномірна і нерівномірна сітка. Використання формул чисельного диференціювання для отримання різницевої задачі. Оцінка похибки апроксимації (локальної і на сітці). Методи підвищення порядку апроксимації. Дослідження стійкості і збіжності. Методи розв’язання відповідної СЛАР і нелінійної системи.

Лекція 22. Інтегро-інтерполяційний метод (ІІМ) побудови РЗ для крайових задач ЗДР з розривними коефіцієнтами – 2 год.

Застосування ІІМ побудови РС на прикладі лінійного ЗДР з розривними коефіцієнтами. Апроксимація крайових умов з допомогою ІІМ.

Лекція 23. Чисельні методи розв`язування задач на власні значення для ЗДР.– 2 год.

Різницевий метод для задач Штурма-Ліувілля. Метод доповненого вектора.

Лекція 24. Метод скінчених елементів розв`язування крайових задач для ЗДР.– 2 год.

Варіаційно-різницеві методи. Елементи області та апроксимація шуканої функції. Метод скінчених елементів на прикладі несамоспряженної крайової задачі для рівняння другого порядку.

Лекція 25. Проекційні і варіаційні методи розв`язування крайових задач для ЗДР – 2 год.

Координатна та проекційна системи функцій. Метод моментів. Метод Гальоркіна. Метод колокації. Зв’язок задачі мінімізації квадратичного функціоналу та крайової задачі. Метод Рітца. Метод найменших квадратів.

Лабораторні роботи - 10 год.

ЛР 11. Метод скінчених різниць розв’язування крайової задачі для ЗДР. – 2 год.

ЛР 12.Чисельні методи розв`язування задач на власні значення для ЗДР.– 2 год.

ЛР 13. Метод скінчених елементів розв`язування крайових задач для ЗДР.– 2 год.

ЛР 14. Проекційні методи розв`язування крайових задач для ЗДР.– 2 год.

Метод моментів. Метод Гальоркіна. Метод колокації.

ЛР 15. Варіаційні методи розв`язування крайових задач для ЗДР.– 2 год.

Метод Рітца. Метод найменших квадратів.

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 20-25 - 26 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:

– Метод редукції розв’язування крайової задачі для ЗДР.
– Метод скінчених різниць розв’язування крайової задачі для ЗДР.
– Проекційні методи розв’язування крайової задачі для ЗДР.
– Варіаційні методи розв’язування крайової задачі для ЗДР
– Метод скінчених елементів розв’язування крайової задачі для ЗДР

Література: [3], [9] - [11], [13].

Питання до змістовного модуля 3

1. Явний і неявний метод Ейлера та оцінка похибки.
2. Симетрична схема однокрокового різницевого методу та оцінка похибки.
3. Поняття збіжності при $h \to 0$.
4. Методи типу Рунге-Кутта.
5. Поправка Рунге-Ромберга.
6. Багатокрокові методи розв`язування задач Коші для ЗДР.
7. Основні поняття стійкості по початковим даним і по правій частині. Збіжність.
8. Методи типу Адамса та оцінка похибки.
9. Побудова екстраполяційних і інтерполяційних формул методів типу Адамса 2-го порядку.
10. Стійкість умовна і абсолютна.
11. Поняття «жорстких» систем диференціальних рівнянь.
12. Постановка крайових задач для ЗДР.
13. Метод редукції до задачі Коші для лінійного рівняння другого порядку.
14. Основні поняття теорії РС.
15. Використання формул чисельного диференціювання для отримання різницевої задачі.
16. Оцінка похибки апроксимації (локальної і на сітці).
17. Методи підвищення порядку апроксимації.
18. Дослідження стійкості і збіжності.
19. Інтегро-інтерполяційний метод побудови РЗ для крайових задач ЗДР з розривними коефіцієнтами.
20. Чисельні методи розв`язування задач на власні значення для ЗДР.
21. Різницевий метод для задач Штурма-Ліувілля.
22. Метод доповненого вектора.
23. Метод скінчених елементів розв`язування крайових задач для ЗДР.
24. Метод скінчених елементів на прикладі несамоспряженної крайової задачі для рівняння другого порядку.
25. Координатна та проекційна системи функцій для проекційних і варіаційних методів розв`язування крайових задач для ЗДР.
26. Метод Гальоркіна.
27. Метод колокації.
28. Метод Рітца.
29. Метод найменших квадратів.

Приклад модульної контрольної роботи

1. **(5 балів)** Явним методом Ейлера знайти в точці $x=0+h$, розв'язок задачі Коші

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \cos(x), x \in (0,\pi);$$
$$u(0) = 0.5;$$
$$\frac{du(0)}{dx} = 0,.$$

2. **(5 балів)** На триточковому шаблоні, методом підвищення порядку апроксимації на розв'язку диференціальної задачі, побудувати різницеву задачу 4-го порядку точності для крайової задачі

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \cos(x), x \in (0,\pi); \frac{du(0)}{dx} - u(0) = 0, u(\pi) = 0.5.$$

Різницеву задачу представити у вигляді СЛАР, для якої можна застосувати метод прогонки.

3. **(5 бали)** Визначити $\varphi_0(x)$ для наближених проекційних і варіаційних методів для комбінацій крайових умов (*третього роду ; першого роду*). Застосувати метод колокацій (одна точка колокації) для крайової задачі, поставленої в п.2.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ IV. Диференціальні рівняння з частинними похідними

Тема №10. Одновимірні рівняння переносу.

Лекція 26. Метод Роте для нестаціонарних систем різнотипових рівнянь. Одновимірні рівняння переносу.– 2 год

Метод Роте для нестаціонарних рівнянь та систем різнотипових рівнянь.

Метод скінчених різниць для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Методи дослідження стійкості та збіжності РС. РС для одновимірних рівнянь переносу та їх аналіз. Побудова консервативної РС для нелінійного рівняння переносу.

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 16. Одновимірні рівняння переносу. – 2 год

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 26 - 12 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   - Застосування методу Роте для розв'язування квазілінійних нестаціонарних крайових задач для рівнянь і змішаних систем рівнянь різного типу.
   - Одновимірні рівняння переносу.

Література: [2], [8], [11], [13].

Тема №11. Параболічні рівняння.

Лекція 27. РС одновимірних параболічних рівнянь.– 2 год

Побудова та дослідження апроксимації, стійкості та збіжності явних та неявних РС. РС підвищенного порядку апроксимації. Дискретизація крайових умов.

Лекція 28. РС двовимірних параболічних рівнянь.– 2 год

Економні РС. Повздовж-поперечна РС та її дослідження.

Лекція 29. РС багатовимірних параболічних рівнянь.– 2 год

Локально-однорідна РС та її дослідження.

Лабораторні роботи - 6 год.

ЛР 17. Одновимірні параболічні рівняння. – 2 год

ЛР 18. Двовимірні параболічні рівняння. – 2 год

ЛР 19. Багатовимірні параболічні рівняння. – 2 год

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 27-29 - 12 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Одновимірні параболічні рівняння.
   – Двовимірні параболічні рівняння.

Література: [2], [8], [11], [13].

Тема №12. Рівняння типу Шредінгера.

Лекція 31. Нелінійні рівняння типу Шредінгера.– 2 год

РС з ваговим коефіцієнтом. Особливість РС для рівняння типу Шредінгера. Дослідження лінійних РС для рівняння типу Шредінгера. Приклад побудови повністю консервативної РС для двовимірного квазілінійного рівняння типу Шредінгера з нелінійністю певного типу.

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 21. Одновимірні лінійні рівняння типу Шредінгера для циліндричної системи координат. – 2 год

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 31 - 4 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Одновимірні гіперболічні рівняння.

Література: [2], [8], [11], [13].

Тема №13. Еліптичні рівняння.

Лекція 30. РС для еліптичних рівнянь.– 2 год

Побудова та дослідження апроксимації, стійкості та збіжності РС для еліптичних рівнянь в прямокутній області. Метод Зейделя розв’язання відповідної СЛАР.

Зведення крайової задачі для еліптичних рівнянь до послідовності задач параболічного типу. Використання економних РС.

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 20. Еліптичні рівняння. – 2 год

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 30 - 4 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Еліптичні рівняння.

Література: [2], [8], [11], [13].

Тема №14. Гіперболічні рівняння.

Лекція 32. РС для одновимірних гіперболічних рівнянь.– 2 год

Явні РС та РС з ваговим коефіцієнтом. Особливість РС для гіперболічних рівнянь. Аналіз РС.

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 22. РС для одновимірних гіперболічних рівнянь. – 2 год

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 32 - 10 год.

У тому числі

3. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
4. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Одновимірні гіперболічні рівняння.

Література: [2], [8], [11], [13].

Питання до змістовного модуля 4

1. Основні поняття МСР для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Методи дослідження стійкості та збіжності РС.
2. РС для одновимірних рівнянь переносу та їх аналіз.
3. Побудова консервативної РС для нелінійного рівняння переносу.
4. Побудова та дослідження апроксимації, стійкості та збіжності однопараметричної РС для одновимірних параболічних рівнянь.
5. РС для двовимірних параболічних рівнянь.
6. Поняття економних РС.

7. Повздовж-поперечна РС та її дослідження.
8. РС для багатовимірних параболічних рівнянь.
9. Локально-однорідна РС першого роду та її дослідження.
10. Локально-однорідна РС другого роду та її дослідження.
11. РС з ваговим коефіцієнтом для квазінелінійних рівнянь типу Шредінгера.
12. Побудова повністю консервативної РС для двовимірного квазілінійного рівняння типу Шредінгера з нелінійністю певного типу.
13. Побудова та дослідження апроксимації РС для еліптичних рівнянь в прямокутній області.
14. Метод Зейделя розв'язання відповідної СЛАР.
15. Зведення крайової задачі для еліптичних рівнянь до послідовності задач параболічного типу.
16. Використання економних РС.
17. Побудова та дослідження апроксимації, стійкості та збіжності РС з ваговим коефіцієнтом для одновимірних гіперболічних рівнянь.
18. Локально-однорідні РС для багатовимірних гіперболічних рівнянь.

Приклад модульної контрольної роботи

1. **(5 балів)** Визначити порядок локальної апроксимації для диференціальної задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0, c>0, x\in(0,\infty), t\in(0,T]; u(x,0)=0, x\in[0,\infty); u(0,t)=3t, t\in[0,T]$$

різницевою задачою

$$\frac{y_k^{j+1}-0.5(y_{k-1}^j+y_{k+1}^j)}{\tau}+c\frac{y_k^{j+1}-y_{k-1}^{j+1}}{h}=0, k=\overline{1,\infty}, j=\overline{0,M-1}; y_k^0=0, k=\overline{1,\infty}; y_0^j=3t_j, j=\overline{0,M-1}$$

.

Дослідити стійкість двошарової РС по початковим даним за принципом максимума.

2. **(5 балів)** Побудувати чисто неявну РС з локальним порядком апроксимації $O(\tau+h^2)$ для диференціальної задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+i\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0, x\in(0,1), t\in(0,T];$$

$$u(x,0)=x(1-x), x\in[0,1]; u(0,t)=3t, \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=0, t\in[0,T]$$

Дослідити стійкість РС по початковим даним спектральним методом.

3. **(5 балів)** Побудувати явну РС з локальним порядком апроксимації $O(\tau+h^2)$ для диференціальної задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\cos(x+t), x\in(0,\pi), t\in(0,T];$$

$$u(x,0)=x(\pi-x), x\in[0,\pi]; \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-u(0,t)=0, u(\pi,t)=0.$$

Дослідити стійкість побудованої РС:

А) по початковим даним і за правою частиною в сітковій нормі $\|\bullet\|_C$;

Б) по початковим даним в сітковій нормі $\|\bullet\|_{L_2}$;

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ V. Інтегральні рівняння

Тема №15. Методи розв'язування коректно поставлених лінійних інтегральних рівнянь.

Лекція 33. Лінійні інтегральні рівняння ІІ роду.– 2 год

Метод квадратур розв′язування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра. Метод заміни шуканої функції (метод колокації, метод лінійної та кубічної сплайн-апроксимації) для чисельного розв′язування коректних інтегральних рівнянь. Метод заміни ядра виродженим. Метод послідовних наближень (чисельний варіант).

Лабораторні роботи - 2 год.

ЛР 23. Лінійні інтегральні рівняння ІІ роду. – 2 год

Метод колокації, квадратурних формул, заміни ядра виродженим, сплайн-апроксимації. Метод послідовних наближень (чисельний варіант).

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекції 33 - 10 год.

У тому числі

1. Виконання загальних домашніх завдань, що сформульовані під час лекцій.
2. Виконання індивідуальних лабораторних завдань [13]:
   – Лінійні інтегральні рівняння ІІ роду

Література: [6], [11], [13].

Питання до змістовного модуля 5

1. Метод квадратур розв'язання лінійного інтегрального рівняння ІІ роду.
2. Метод колокації розв'язання лінійного інтегрального рівняння ІІ роду.
3. Метод заміни ядра виродженим для розв'язання лінійного інтегрального рівняння ІІ роду.
4. Метод сплайн-апроксимації розв'язання лінійного інтегрального рівняння ІІ роду.
5. Чисельний метод послідовних наближень.

Приклад модульної контрольної роботи

1. **(5 балів)** Побудувати («перший» ланцюжок побудови ЛОС) адитивну схему з сумарною апроксимацією $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ для диференціальної задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2)u(x_1, x_2, t) + 2x_1 + x_2 + 2t, x \in (0,1)\times(0,1), t \in (0,T];$$
$$u(x_1, x_2, 0) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2), x \in [0,1]\times[0,1];$$
$$u(0, x_2, t) = 3t, \frac{\partial u(1, x_2, t)}{\partial x_1} = 0, u(x_1, 0, t) = 0, u(x_1, 1, t) = 2t, t \in [0,T]$$

2. **(5 балів)** Побудувати РС з локальним порядком апроксимації $O(h_1^2 + h_2^2)$ для крайової задачі

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=-\cos(x_1+x_2), x_1\times x_2\in(0,1)\times(0,1);$$
$$u(x_1,0)=x_1(1-x_1), u(x_1,1)=0, x_1\in[0,1];$$
$$u(0,x_2)=x_2(1-x_2), u(1,x_2)=0, x_2\in[0,1].$$

Знайти оптимальне значення параметру ітераційного процесу методу верхньої релаксації при $h_1=h_2=0.1$.

3. **(5 балів)** Побудувати РС з локальним порядком апроксимації $O(t^2+h^2)$ для крайової задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+x+2t, x\in(0,1), t\in(0,T];$$
$$u(x,0)=x(1-x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, x\in[0,1];$$
$$u(0,t)=3t, \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=2, t\in[0,T].$$

ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ (I семестр)

1. Класифікація похибок, дії з наближеними величинами.
2. Метод Гаусса (схема оптимального виключення).
3. Метод Халецького.
4. Метод квадратних коренів.
5. Метод прогонки та його коректність.
6. Числа обумовленості матриць.
7. Метод простої ітерації для СЛАР, умови збіжности і оцінки похибки.
8. Метод Зейделя для СЛАР, умови збіжности і оцінки похибки.
9. Ітераційний метод лінійний оптимальний процес.
10. Ітераційний метод Річардсона.
11. Ітераційний метод релаксації.
12. Ітераційний метод найшвидшого спуску.
13. Чисельне розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь. Метод дихотомії.
14. Метод простої ітерації.
15. Метод Ньютона та його модифікації.
16. Повна і часткова проблема власних значень.
17. Степенево-ітераційний метод розв′язування часткової проблеми власних значень. Метод скалярних добутків.
18. Метод обертань розв′язування повної проблеми власних значень.
19. Системи Чебишова, інтерполювання, єдиність інтерполяційного поліному.
20. Необхідні і достатні умови системи Чебишова.
21. Інтерполяційний поліном в формі Лагранжа.
22. Інтерполяційний поліном в формі Ньютона.
23. Похибка інтерполяційного поліному.
24. Мінімізація залишка інтерполювання, використання поліномів Чебишова.
25. Обернене інтерполювання.
26. Інтерполювання сплайнами, крайові умови та побудова лінійних і кубічних сплайнів.
27. Екстремальна властивіість сплайнів.
28. Апроксимація функцій методом найменших квадратів.
29. Рівномірне наближення функцій.
30. Побудова формул чисельного диференціювання і оцінка похибки.
31. Некоректність чисельного диференціювання.
32. Інтеполяційні квадратурні формули чисельного інтегрування, необхідні і достатні умови інтерполяційних квадратурних формул.
33. Квадратурні формули Ньютона-Котеса, властивість коефіцієнтів квадратурних формул Ньютона-Котеса.
34. Похибка квадратурних формули Ньютона-Котеса для парної (непарної) кількості проміжків розбиття.
35. Узагальнені квадратурні формули прямокутників та їх похибки.
36. Узагальнені квадратурні формули трапецій та їх похибки.
37. Узагальнені квадратурні формули Сімпсона та їх похибки.
38. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності, необхідні і достатні умови.
39. Алгоритм побудови квадратурних формул найвищого алгебраїчного степеня точності.

ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ (ІІ семестр)

1. Основний метод обчислювальної математики. Класифікація похибок, дії з наближеними величинами.
2. Метод Гаусса (схема оптимального виключення) розв’язання СЛАР.
3. Метод прогонки та його коректність.
4. Метод Халецького.
5. Метод квадратних коренів.
6. Вплив похибок вхідних даних на розв′язок СЛАР. Числа обумовленості СЛАР.
7. Метод простої ітерації для СЛАР, умови збіжности і оцінка похибки.
8. Метод Зейделя для СЛАР, умови збіжности і оцінка похибки.
9. Метод дихотомії для чисельного розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь.
10. Метод простої ітерації, умови збіжности і оцінка похибки.
11. Метод Ньютона, умови збіжности і оцінка похибки.
12. Модифікації метода Ньютона: хорд, січних.
13. Метод Ньютона та його модифікації для системи нелінійних рівнянь.
14. Повна і часткова проблема власних значень.
15. Степенево-ітераційний метод розв′язування часткової проблеми власних значень. Метод скалярних добутків.
16. Метод обертань розв′язування повної проблеми власних значень.
17. Системи Чебишова, інтерполювання, єдиність інтерполяційного поліному. Узагальнена теорема Ролля.
18. Необхідні і достатні умови системи Чебишова.
19. Інтерполяційний поліном в формі Лагранжа.
20. Інтерполювання при рівновіддалених вузлах.
21. Інтерполяційний поліном в формі Ньютона.
22. Похибка інтерполяційного поліному.
23. Мінімізація залишка інтерполювання, використання поліномів Чебишова.
24. Обернене інтерполювання.
25. Інтерполювання сплайнами, крайові умови та побудова лінійних і кубічних сплайнів.
26. Екстремальна властивість сплайнів.
27. Апроксимація функцій методом найменших квадратів.
28. Рівномірне наближення функцій.
29. Задача чисельного диференціювання, некоректність.
30. Побудова формул чисельного диференціювання і оцінка похибки.
31. Оптимльний крок чисельного диференціювання.
32. Задача чисельного інтегрування.
33. Інтеполяційні квадратурні формули чисельного інтегрування, необхідні і достатні умови інтеполяційних квадратурних формул.
34. Квадратурні формули Ньютона-Котеса, властивість коефіцієнтів.
35. Похибка квадратурних формули Ньютона-Котеса для парної (непарної) кількості проміжків розбиття.
36. Узагальнені квадратурні формули прямокутників, трапецій та їх похибки.
37. Узагальнені квадратурні формули Сімпсона та їх похибки.

38. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності, необхідні і достатні умови таких формул.
39. Побудова квадратурних формул найвищого алгебраїчного степеня точності.
40. Різницеві методи для чисельного розв′язування задачі Коші для ЗДР.
41. Методи типу Рунге-Кутта.
42. Правило Рунге, вибір довжини кроку.
43. Багатокрокові методи типу Адамса, інтерполяційні та екстраполяційні схеми.
44. Балістичний метод розв′язування крайових задач для ЗДР.
45. Основні поняття МСР: апроксимація, коректність та збіжність.
46. Методи побудови РС: метод наближення диференціальних операторів, метод невідомих коефіцієнтів, інтегро-інтерполяційний метод.
47. Застосування МСР до розв′язування крайових задач для ЗДР.
48. Методи побудови дискретного аналога граничних умов крайової задачі для ЗДР: метод уточнення нев′язки, метод фіктивної точки.
49. Координатна та проекційна системи функцій в проекційних та варіаційних методах.
50. Метод Гальоркіна.
51. Метод колокації.
52. Зв’язок задачі мінімізації квадратичного функціоналу та крайової задачі.
53. Метод Рітца.
54. Метод найменших квадратів.
55. Алгоритм РС розв′язування крайових задач для рівнянь в частинних похідних. Стійкість РС та методи її дослідження для різницевих схем в $\|\ \|_C$ і $\|\ \|_{L_2}$ (признак рівномірної стійкості за початковими даними, за правими частинами, принцип максимуму, метод гармонік).
56. Застосування РС для розв′язування задач переносу маси.
57. Побудова консервативної РС для нелінійного рівняння переносу.
58. Побудова РС з вагами для розв′язування задач теплопровідності.
59. Апроксимація і умови їх стійкості.
60. Економні різницеві схеми (ППС, ЛОС), їх апроксимація та стійкість.
61. Застосування різницевих методів для розв′язування крайових еліптичного типу.
62. Застосування різницевих методів для розв′язування задач гіпероболічного типу,
63. Методи факторизації для еліптичних рівнянь, багатовимірних гіперболічних рівнянь.
64. Поняття консервативності РС на прикладі квазілінійного рівняння типу Шредінгера з нелінійністю певного типу.
65. Поняття методу скінчених елементів (МСЕ).
66. Реалізація МСЕ на основі проекційних інтегральних співвідношень.
67. Метод квадратур розв′язування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра.

68. Метод заміни шуканої функції (метод колокації, метод лінійної та кубічної сплайн-апроксимації) для чисельного розв′язування коректних інтегральних рівнянь.
69. Метод заміни ядра виродженим.
70. Чисельний метод послідовних наближень.

Приклад екзаменаційного білету

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет	Механіко-математичний
Напрям підготовки	Математика
Учбова дисципліна	Методи обчислень
Семестр	8

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №13.

1. Метод прогонки та теорема про його коректність.
2. Метод побудови різницевих схем наближенням диференціальних операторів (на прикладі задач гіперболічного типу).
3. Задача.
   Застосувати метод Роте («прямих») для задачі

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (3+5i)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 3t\sin(x^2 - U),$$
$$U(0,t) = 2, U(1,t) = 1, U(x,0) = 2 - x.$$

Затверджено на засіданні кафедри математичної фізики
протокол N 12 від 23 травня 2013р.

Завідуючий кафедрою	Самойленко В.Г.
Екзаменатор	Довгий Б.П.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.И. Численные методы. – М.: Наука,1987.– 600 с.

2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, т.1,2, 1966.

3. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислний. М.: Наука,1971.–248с.

4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.– М.: Наука,1970.– 670 с.

5. Завъялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.– 512 с.

7. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, т.1. 1976. –302 с.

8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, т.2. 1977. –400 с.

9. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробагатько А.А. Методы вычислений. К.:Высш.шк.,1977. –406 с.

10. Самарский А.А., А.В.Гулин. Численные методы. М.: Наука, 1989.– 432 с.

11. Попов В.В. Методи обчислень. Частина I. – Internet-сторінка кафедри математичної фізики сайту www.univ.kiev.ua.

12. Попов В.В. Методи обчислень. Частина II. – Internet-сторінка кафедри математичної фізики сайту www.univ.kiev.ua.

13. Попов В.В., Вакал Є.С., Довгий Б.П. Учбові завдання для самостійної роботи з дисципліни "Методи обчислень". Навчально-методичний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – Internet-сторінка кафедри математичної фізики сайту www.univ.kiev.ua.

Додаткова література

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения– М.: Мир. 1972. – 312с.

2. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука. 1967. – 500 с.

3. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука. 1984. – 352с.

4. Попов В.В. Сплайн-функції. Internet-сторінка кафедри математичної фізики сайту www.univ.kiev.ua.