Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Методичні розробки до практичних занять
з дисципліни "Теорія функцій комплексної змінної"

Конформні відображення функцій комплексної змінної

для студентів механіко-математичного факультету,
які навчаються за напрямом підготовки "Механіка"

Київ 2012

Методичні розробки до практичних занять з дисципліни "Теорія функцій комплексної змінної". Конформні відображення функцій комплексної змінної для студентів механіко-математичного факультету, які навчаються за напрямом підготовки "Механіка" / Упорядники: Г.В. Верьовкіна, А.В. Ловейкін

Рецензенти: Т.А. Мельник доктор фіз.-мат. наук, професор

О.М. Харитонов кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено вченою радою механіко-математичного факультету, протокол № 2 від 10 жовтня 2011 р.

Вступ

За навчальним планом студенти механіко-математичного факультету, які навчаються за напрямом підготовки "Механіка", вивчають курс "Теорія функцій комплексної змінної" протягом 4-5 семестрів. Дані методичні розробки для підготовки і проведення практичних занять з курсу розраховані для студентів і викладачів. Під час їхньої підготовки використано багаторічний досвід викладання курсів "Теорія функцій комплексної змінної" та "Комплексний аналіз" на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Дані методичні розробки "Конформні відображення функцій комплексної змінної" містять матеріал, який викладається протягом першого семестра вивчення курсу "Теорія функцій комплексної змінної". Весь матеріал розбито на окремі заняття. На початку кожного заняття запропоновано теоретичні питання для самоперевірки за темою, яка буде розглядатись, викладено основні теоретичні відомості, наведено розв'язки типових задач. До кожної теми запропоновано набір задач для розв'язання під час аудиторних занять і для самостійної роботи студентів, включено задачі підвищеної складності, позначені *.

Для підготовки методичних розробок автори використовували літературу [1, 3–9, 11, 14, 16–18], список якої дано в кінці видання. При складанні завдань для аудиторної та самостійної роботи використовувались навчальні посібники та методичні розробки [2, 10, 12, 13, 15].

Заняття 1. Поняття комплексного числа. Дії на множині комплексних чисел

1. Теоретичні питання

1. Комплексне число. Дії на множині комплексних чисел.
2. Геометрична інтерпретація множини комплексних чисел. Поняття модуля та аргументу комплексного числа, головне значення аргументу комплексного числа. Форми запису комплексного числа.
3. Приклади полів ізоморфних полю комплексних чисел.
4. Формула Муавра. Корінь *n*-степеня з комплексного числа.

Означення. Комплексним числом називають упорядковану пару дійсних чисел (x, y).

Означення. Множину всіх можливих упорядкованих пар дійсних чисел $z = (x, y)$ називають множиною комплексних чисел і позначають $\mathbf{C}$.

На множині комплексних чисел $\mathbf{C}$ вводять дії додавання та множення за правилами:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad (1.1)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (1.2)$$

Множина $\mathbf{C}$ з діями (1.1), (1.2) утворює поле. Два елементи $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ вважають рівними, тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Множина $\{z = (x,0) : x \in \mathbf{R}\}$ є замкненою відносно дій (1), (2) і утворює поле, ізоморфне полю дійсних чисел $\mathbf{R}$ з діями додавання та множення. Отже, $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Означення. Комплексне число $(0,1)$, для якого має місце рівність $(0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, називають уявною одиницею і позначають i.

Твердження. Будь-яке комплексне число можна записати у вигляді

$$z = (x, y) = (x,0) + (y,0)(0,1) = x + iy. \qquad (1.3)$$

Запис (1.3) називають алгебраїчною (декартовою) формою запису комплексного числа. Число $x = \operatorname{Re} z$ називають дійсною частиною, $y = \operatorname{Im} z$ – уявною частиною комплексного числа $z = (x, y) = x + iy$.

Означення. Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається комплексно спряженим до числа $z = x + iy$.

Для комплексно спряжених чисел очевидно виконується властивість $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Комплексне число визначається впорядкованою парою дійсних чисел. Природно зображати комплексне число $z = x + iy$ точкою на площині $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, а саме $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Очевидно, що така відповідність між множиною комплексних чисел $\mathbf{C}$ і точками на площині $\mathbf{R}^2$ є взаємно однозначною. Якщо в площині $\mathbf{R}^2$ визначити дії додавання та множення за правилами (1.1), (1.2), то площина $\mathbf{R}^2$ з діями додавання та множення утворює поле, що ізоморфне полю комплексних чисел. Така площина називається комплексною площиною.

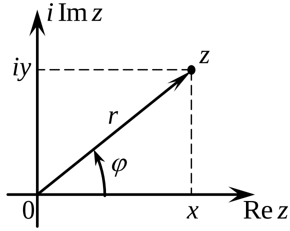

Рис. 1.1

Введемо в комплексній площині полярні координати (r, φ) точки $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ (рис. 1.1).

Означення. Величину $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $r \in [0; +\infty)$ називають модулем комплексного числа $z = x + iy$.

Модуль комплексного числа визначається однозначно. Причому $|z| = 0$ тоді й тільки тоді, коли $z = 0$. Зауважимо також, що $z\bar{z} = |z|^2$.

Означення. Величину $\varphi = \mathrm{Arg} z$, $\varphi \in (-\infty; +\infty)$ називають аргументом комплексного числа $z = x + iy$. Причому для комплексного числа $z = 0$ значення аргументу не визначено.

Аргумент комплексного числа визначається з точністю до кратного 2π. Значення аргументу $\varphi \in (-\pi; \pi]$ називають головним значенням аргументу комплексного числа та позначають $\arg z$ (у літературі часто головне значення визначається умовою $\varphi \in [0; 2\pi)$). Очевидно $\mathrm{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Зрозуміло, що для комплексного числа $z = x + iy$, $z \neq 0$ значення аргументу визначається із співвідношень

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Означення. Будь-яке комплексне число $z \neq 0$ можна записати у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.4}$$

Співвідношення (1.4) називають тригонометричною формою запису комплексного числа.

Ураховуючи формулу Ейлера, зрозуміло, що будь-яке комплексне число $z \neq 0$ можна записати у вигляді

$$z = re^{i\varphi}. \tag{1.5}$$

Запис (1.5) називають експоненціальною (показниковою) формою запису комплексного числа.

Тригонометрична форма запису (1.4) комплексних чисел є зручною при знаходженні добутку та частки від ділення комплексних чисел, а саме для комплексних чисел $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),\ k = 1{,}2$ згідно з визначенням дії множення комплексних чисел (1.2) та властивостей тригонометричних функцій маємо:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\quad z_2 \neq 0.$$

Має місце формула Муавра обчислення натурального степеня комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а саме:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbf{N}. \tag{1.6}$$

За формулою Муавра (1.6) легко дістати корінь натуральний $n \in \mathbf{N}$ комплексного числа $z \neq 0$, а саме:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}e^{i\cdot\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ \text{де}\ k = \overline{0, n-1}.$$

2. Приклади розв'язування задач

1. Розв'язати рівняння $z^{n-1} = \overline{z},\ n > 2$

► Очевидно, що число $z = 0$ є розв'язком рівняння.

Вважаємо, що $z \neq 0$. Тоді за рівністю $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ з даного рівняння отримаємо еквівалентне $z^n = |z|^2$. Тоді $z^n \in \mathbf{R}_+$. Звідси випливає $|z|^{n-2} = 1, n > 2$, тобто $|z| = 1$. Повертаючись до рівняння $z^n = |z|^2$, остаточно отримаємо $z^n = 1, n > 2$, розв'язками якого є числа, що визначаються $z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}},\ k = \overline{0, n-1}$.◄

2. Довести нерівність $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall\{z_1, z_2\} \subset \mathbf{C}$.

► У випадку, якщо $z_1 = z_2$, нерівність очевидно виконується.

Розглянемо випадок $z_1 \neq z_2$. З геометричної інтерпретації комплексних чисел векторами на площині очевидно випливає, що $|z_1+z_2|, \forall\{z_1,z_2\}\subset \mathbf{C}$ є довжиною вектора, яка є діагоналлю паралелограма з вершинами в точках $0,\ z_1,\ z_1+z_2,\ z_2$. Але $|z_1|,|z_2|, \forall\{z_1,z_2\}\subset \mathbf{C}$ є довжини векторів, відповідні комплексним числам z_1, z_2. За нерівністю трикутника очевидно маємо виконання нерівності $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|, \forall\{z_1,z_2\}\subset \mathbf{C}$. ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Виконати дії:

а) $\dfrac{2+i}{2-i}$;

в) $i^n, n\in \mathbf{N}\cup\{0\}$;

б) $\left(\dfrac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^3$;

г) $(1+i\sqrt{3})^9$.

2. Довести співвідношення:

а) $\overline{ab}=\overline{a}\cdot\overline{b}$;

в) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, \operatorname{Im} z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

б) $\overline{a}=a^{-1}, \forall a: |a|=1$;

3. Знайти модулі та аргументи комплексних чисел

$i;\ -1;\ 1+i;\ 1+i\sqrt{3};\ 0;\ \infty$.

4. Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

а) $z^n=a,\ \ a>0$;

б) $z^3+w^5=0,\quad z^2\overline{w}^4=1$;

в) $\prod\limits_{k=0}^{n}(\cos kx+i\sin kx)=1,\ \ x\in \mathbf{R}$.

5. Знайти суми $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos kx,\ \sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx,\ \ n\in \mathbf{N}$.

6. Довести нерівності:

а) $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|, \forall\{z_1,z_2\}\subset \mathbf{C}$;

б) $|z-1|\le\big||z|-1\big|+|z|\arg z, \forall z\in \mathbf{C}$.

7. * Довести, що значення $\sqrt{z^2-1}$ лежать на прямій, яка проходить через початок координат, паралельно бісектрисі внутрішнього кута трикутника з вершинами в точках $-1;\ \ z;\ 1$, проведеної із z.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Виконати дії:

а) $\frac{1-i}{1+i}$; б) $\frac{1}{i^n}, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; в) $\left(\frac{2}{1-i}\right)^3$; г) $(1-i\sqrt{3})^9$.

2. Довести співвідношення $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}, b \neq 0$.

3. Знайти модулі та аргументи чисел $3i$; -2; e^{2+i}; e^{-3-4i}.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^5 = -4+3i$; б) $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots 1 = 0, n \in \mathbf{N}$.

5. Знайти суми:

а) $\sum_{k=0}^{n} \cos(2k+1)x, \sum_{k=0}^{n} \sin(2k+1)x, n \in \mathbf{N}$;

б) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos kx, \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \sin kx, n \in \mathbf{N}$.

6. Записати $\cos 5x$, $\sin 5x$ через $\cos x$, $\sin x$.

7. Нехай виконуються рівності: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Тоді, якщо $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то z_1, z_2, z_3 - вершини правильного трикутника.

8. * Нехай виконуються рівності $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$. Тоді, якщо $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, то z_1, z_2, z_3, z_4 або попарно збігаються, або є вершинами прямокутника.

Заняття 2. Топологія комплексної площини та розширеної комплексної площини. Стереографічна проекція

1. Теоретичні питання

1. Стереографічна проекція. Формули стереографічної проекції. Властивості стереографічної проекції.
2. Поняття евклідової та сферичної метрики.
3. Поняття околу точки, проколотого околу точки в $\mathbf{C}$ та $\overline{\mathbf{C}}$. Внутрішні, зовнішні точки множини. Поняття відкритої та замкненої множини. Граничні (межеві) точки множини, границя (межа) множини. Зв'язні множини.
4. Поняття області. Границя області. Зовнішність області. Порядок зв'язності області.

Геометричною інтерпретацією множини комплексних чисел **C** поряд з комплексною площиною є комплексна сфера – сфера Рімана. У тривимірному евклідовому просторі з прямокутною системою координат $O\xi\eta\zeta$ розглянемо сферу $S:\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ та комплексну площину, розташовану горизонтально, що збігається з площиною $O\xi\eta$, причому вісь Ox збігається з віссю $O\xi$, вісь Oy збігається з віссю $O\eta$ (рис. 2.1).

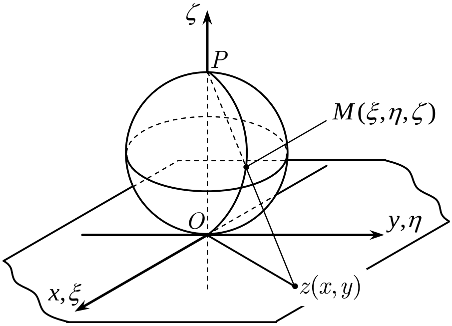

Рис. 2.1

Означення. Кожній точці $z=(x,y)$ комплексної площини **C** поставимо у відповідність точку $M(\xi,\eta,\zeta)$ сфери S, як точку перетину променя, що виходить з точки $P(0,0,1)$ (полюса сфери) і проходить через точку $z=(x,y)$. Побудована відповідність називається стереографічною проекцією.

Формули стереографічного проектування, що визначають зв'язок між координатами точки $M(\xi,\eta,\zeta)$ на сфері Рімана та координатами точки $z=(x,y)$ на комплексній площині, мають вигляд

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}, \tag{2.1}$$

де $|z|^2=x^2+y^2, \{x,y\}\in\mathbf{R}$,

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}, \tag{2.2}$$

де $(\xi,\eta,\zeta)\in S\setminus\{P\}$.

Стереографічна проекція визначає взаємно однозначну відповідність між точками комплексної площини **C** і точками сфери Рімана S без її полюса. Полюсу сфери $P(0,0,1)$ ставиться у відповідність нескінченно віддалена точка $z=\infty$.

Означення. Комплексна площина **C** разом з нескінченно віддаленою точкою $z=\infty$, називається розширеною комплексною площиною і позначається $\overline{\mathbf{C}}$.

Ототожнення розширеної комплексної площини $\overline{\mathbf{C}}$ зі сферою Рімана S дає геометричну інтерпретацію нескінченно віддаленої точки і не виділяє точку $z = \infty$ серед інших точок $\overline{\mathbf{C}}$.

Відповідно до двох способів геометричного представлення комплексних чисел вводять дві метрики: евклідову та сферичну.

Евклідова метрика на множині комплексних чисел визначається за формулою

$r(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, де $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

Сферична метрика на множині точок розширеної комплексної площини визначається за допомогою евклідової метрики в $\mathbf{R}^3$ як відстань між сферичними образами точок $\{z_1, z_2\} \subset \overline{\mathbf{C}}$ на сфері Рімана за формулами:

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}, \{z_1, z_2\} \subset \mathbf{C} \text{ та}$$

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, z_1 \in \mathbf{C}, z_2 = \infty.$$

Введення метрики перетворює множину комплексних чисел на метричний простір. Для обмежених множин евклідова та сферична метрики є еквівалентними. Тому сферична метрика використовується частіше при розгляді необмежених множин.

2. Приклади розв'язування задач

1. Довести, що множина комплексних чисел $\mathbf{C}$ є областю.

► Покажемо, що $\mathbf{C}$ – відкрита, лінійно-зв'язна множина.

$\mathbf{C}$ – відкрита множина. Дійсно, для $\forall z_0 \in \mathbf{C}$ існує окіл відповідної точки $\exists U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, що $U(z_0, \varepsilon) \subset \mathbf{C}$.

$\mathbf{C}$ – лінійно-зв'язна множина. Дійсно, $\forall \{z_1, z_2\} \subset \mathbf{C}, z_1 \neq z_2$ існує неперервний шлях з кінцями в цих точках, наприклад відрізок $[z_1, z_2] \subset \mathbf{C}$.

Множина комплексних чисел $\mathbf{C}$ є областю. ◄

2. З'ясувати геометричний зміст співвідношення $\operatorname{Im}\dfrac{z - i}{z + i} = 0$.

► Розв'яжемо задачу двома способами.

1 спосіб: Запишемо число z в алгебраїчній формі $z = x + iy$ та підставимо в задану рівність.

Маємо

$$\operatorname{Im}\frac{z-i}{z+i}=\operatorname{Im}\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\operatorname{Im}\frac{(x+i(y-1))(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2}=\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}=0\,.$$

Звідси випливає, що $x=\operatorname{Re}z=0, z\neq -i$. Тобто даній рівності відповідають точки уявної осі за винятком точки $z=-i$.

2 спосіб: Запишемо комплексні числа в експоненціальній формі $z-i=r_1e^{i\varphi_1}, z+i=r_2e^{i\varphi_2}$ та підставимо в задану рівність. Маємо

$$\operatorname{Im}\frac{z-i}{z+i}=\operatorname{Im}\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\operatorname{Im}\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\sin(\varphi_1-\varphi_2)=0\,.$$

Звідси випливає, що $\varphi_1-\varphi_2=\pi k, k\in\mathbf{Z}$, тобто на проміжку $(-\pi,\pi]$ маємо $\varphi_1-\varphi_2=0, \varphi_1-\varphi_2=\pi$. Отже, відповідні вектори $z-i, z+i$ є колінеарні. Тобто даній рівності відповідають точки уявної осі $\operatorname{Re}z=0$ за винятком точки $z=-i$. ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Довести, що множина комплексних чисел та множина комплексних чисел розширена є областями.

2. З'ясувати геометричний зміст співвідношень і охарактеризувати множини:

а) $\{|z-z_0|<R\},\{|z-z_0|=R\},\{|z-z_0|>R\}, z_0\in\mathbf{C}, R>0$;

б) $\{z=2e^{it}, t\in[0,\pi]\},\{z=z_0+Re^{it}, t\in[0,\pi]\}$;

в) $\{|z-3|+|z+3|<7\},\{|z-3|+|z+3|=7\},\{|z-3|+|z+3|>7\}$;

г) $\{|z-z_1|=|z-z_2|\},\{|z-z_1|>|z-z_2|\},\{z_1,z_2\}\subset\mathbf{C}, z_1\neq z_2$;

д) $\{\pi/4<\arg z<\pi/3\},\{\pi/4<\arg(z-z_0)<\pi/3\}z_0\in\mathbf{C}$.

3. З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

а) $|z|=\operatorname{Re}z+1$;

б) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=c, c\in\mathbf{R}$;

в) $\operatorname{Im}z^2+c, c\in\mathbf{R}$;

г) $\operatorname{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0,\{z_1,z_2\}\in\mathbf{C}$;

д) $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0,\{z_1,z_2\}\in\mathbf{C}$;

е) $\dfrac{\pi}{4}<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{3\pi}{4}$.

4. Дати відповіді на запитання:

а) що відповідає на сфері Рімана сімейству паралельних прямих на площині?

б) що є образом кола $\{|z|=R\}, R>0$ на сфері Рімана?

в) що є образом променя $\{\arg z=\alpha\}, \alpha\in\mathbf{R}$ на сфері Рімана?

5. Знайти на сфері Рімана образи областей $\{\operatorname{Im} z>0\}, \{\operatorname{Re} z<0\}, \{|z|<1\}$.

6. З'ясувати, як розташовані на сфері Рімана образи точок, якщо
а) на площині ці точки симетричні дійсній осі;
б) на площині ці точки симетричні відносно точки $z=0$.

4. Задачі для самостійної роботи

1. З'ясувати геометричний зміст співвідношень і охарактеризувати множини:

а) $\{|z-2|+|z+2|<3\}, \{|z-2|-|z+2|=3\}, \{|z-2|-|z+2|>3\}$;

б) $\{-\pi/4<\arg z<\pi/4\}$, $\{-\pi<\arg(z-z_0)<\pi\}$, $z_0\in\mathbf{C}$;

в) $\{0<\operatorname{Re} iz<1\}$;

г) $\{\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1\}$.

2. З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

а) $|z|=\operatorname{Im} z+1$; б) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=c, c\in\mathbf{R}$; в) $\operatorname{Re} z^2=c, c\in\mathbf{R}$;

г) $\operatorname{Re}\dfrac{z+1}{z-1}=0$; д) $\dfrac{3\pi}{4}<\arg\dfrac{z+1}{z-1}<\pi$.

3. Дати відповіді на запитання:

а) що відповідає на сфері Рімана сімейству прямих, які проходять через точку $z=0$ на площині?

б) що є образом зовнішності кола $\{|z|=R\}, R>0$ на сфері Рімана?

4. Знайти на сфері Рімана образи областей:

$\{\operatorname{Im} z<0\}$, $\{\operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\}$, $\{|z|>1\}$, $\{\operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z<0, |z|<1\}$

5. З'ясувати, як розташовані на сфері Рімана образи точок, якщо
а) на площині ці точки симетричні дійсній відносно кола $|z|=1$;

б) на площині ці точки симетричні відносно дійсної осі (уявної осі).

6. Довести, що довільне коло або пряма на площині переходять при стереографічній проекції в коло на сфері Рімана. В які кола переходять прямі?

7. Довести, що довільне коло на сфері Рімана при стереографічній проекції перейде в коло або пряму на площині. Які кола переходять у прямі?

Заняття 3. Функція комплексної змінної. Умови Коші–Рімана диференційовності функції в точці. Гармонічні функції

1. Теоретичні питання

1. Означення функції комплексної змінної. Визначення функції в області.
2. Границя функції комплексної змінної в точці. Границя функції комплексної змінної в точці за множиною. Неперервні функції, їхні властивості.
3. Означення диференційовної в точці функції. Похідна функції в точці. Умови Коші–Рімана диференційовності функції комплексної змінної в точці. Поняття аналітичності функції.
4. Геометричний зміст модуля та аргументу похідної.
5. Означення конформного відображення.
6. Гармонічні в області функції. Спряжені гармонічні функції.

Означення. Кажуть, що на множині комплексних чисел $M \subset \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$ визначено функцію (відображення) $f(z)$, якщо визначено правило, згідно з яким $\forall z \in M$ ставиться у відповідність одне або декілька комплексних чисел $w \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$.

Означення. Функція $f(z)$ називається однозначною, якщо $\forall z \in M$ ставиться у відповідність лише одне комплексне число $w \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$. У протилежному випадку функцію називають багатозначною.

Надалі, якщо не вказано інше, розглядають однозначні функції.

Позначають функцію стандартним чином $w = f(z)$ або як відображення $z \to f(z)$.

Число $w \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$ називають образом числа z, а число z - прообразом w. Множину $M \subset \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$ називають областю визначення функції $f(z)$, множину $N = f(M) = \{w : w = f(z), z \in M\}$ – областю значень функції $f(z)$.

Нехай задано однозначну функцію $w = f(z)$.

Означення. Функція $w = f(z)$ називається однолисною на множині $M \subset \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$, якщо $\forall \{z_1, z_2\} \subset M, z_1 \neq z_2$ при відображенні функцією

$f(z)$ мають різні образи.

За визначенням комплексних чисел випливає, що кожна функція $f(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$ є впорядкованою парою дійсних функцій двох змінних, тобто може бути записана у вигляді $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, де функції $U(x,y), V(x,y)$ називають дійсною та уявною частинами функції $f(z)$ відповідно.

Використовуючи поняття околу точки в топології комплексної площини та розширеної комплексної площини, визначають границю функції в точці. Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому проколотому околі точки $z_0 \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$.

Означення. Число $w_0 \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$ називають границею функції $f(z)$ в точці $z_0 \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$, якщо для $U(w_0)$ – довільного околу точки $w_0 \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$ знайдеться такий $U(z_0) \setminus \{z_0\}$ – проколотий окіл точки $z_0 \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$, що для $\forall z_0 \in U(z_0) \setminus \{z_0\}$ значення $f(z) \in U(w_0)$.

Позначають границю функції в точці стандартно $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

У деяких випадках використовують поняття границі функції в точці за множиною.

Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0 \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$.

Означення. Функція $f(z)$ називається неперервною в точці $z_0 \in \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$, якщо $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. У випадку $f(z_0) = \infty$ кажуть про узагальнену неперервність.

З означень границі функції в точці та неперервності функції в точці випливає, що властивості границь функцій та властивості неперервних функцій, що визначаються для дійсних функцій дійсної змінної, поширюються на функції комплексної змінної.

Нехай функція $f(z)$ визначена в околі $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbf{C}$.

Означення. Якщо існує границя $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то границя називається похідною функції $f(z)$ у точці $z_0 \in \mathbf{C}$ і позначається $f'(z_0)$. Функція $f(z)$ називається диференційовною в точці $z_0 \in \mathbf{C}$.

Зауважимо, що в означенні диференційовної в точці функції розглядають границю $z \to z_0$ по довільному шляху, що лежить в околі $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbf{C}$.

З означень похідної функції в точці випливає, що властивості похідних функцій, які визначаються для дійсних функцій дійсної змінної, поширюються на функції комплексної змінної.

Теорема (Умови Коші–Рімана, критерій диференційовності). Щоб функція $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, визначена в деякому околі $U(z_0)$ точки $z_0=x_0+iy_0\in\mathbf{C}$, була диференційовною в точці $z_0=x_0+iy_0\in\mathbf{C}$ як функція комплексної змінної, необхідно і достатньо, щоб дійсні функції $U(x,y),V(x,y)$ були диференційовні в точці (x_0,y_0) як дійсні функції двох дійсних змінних, та їхні частинні похідні задовольняли в цій точці співвідношення

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Співвідношення (3.1) називають умовами Коші–Рімана (Ейлера–Даламбера).

Означення. Функція $f(z)$, диференційовна в деякому околі точки $z_0\in\mathbf{C}$, називається аналітичною в точці $z_0\in\mathbf{C}$. Кажуть, що функція $f(z)$ аналітична в точці $z_0=\infty$, якщо функція $g(z)=f(1/z)$ аналітична в точці $z_0=0$.

Означення. Функція $f(z)$ визначена і неперервна в деякому околі точки $z_0\in\mathbf{C}$ називається конформною в точці $z_0\in\mathbf{C}$, якщо виконує властивість збереження кута повороту гладких кривих, що проходять через точку $z_0\in\mathbf{C}$, та властивість сталості коефіцієнта розтягу в достатньо малому околі точки $z_0\in\mathbf{C}$. Функцію $f(z)$ називають конформною в точці $z_0=\infty$, якщо $f(z)$ є конформною у відповідній точці на сфері Рімана.

Означення. Функція $f(z):D\to\overline{\mathbf{C}}$, що є однолисною в заданій області D і конформною в кожній точці області, називається конформною в області D.

Якщо $f(z)$ аналітична в точці $z_0\in\mathbf{C}$ та $f'(z_0)\neq 0$, то дана функція є конформною в точці $z_0\in\mathbf{C}$.

2. Приклади розв'язування задач

1. Довести, що функція $f(z)=\sqrt{xy}, z=x+iy\in\mathbf{C}$ не є диференційовною в точці $z_0=0$, а умови Коші–Рімана виконуються.

► Запишемо функцію $f(z)$ дійсною та уявною частинами, тоді $U(x,y)=\sqrt{xy}$,$V(x,y)=0$.

У точці $z_0=0$ виконуються умови Коші–Рімана (3.1). Дійсно:

$$\frac{\partial U(0{,}0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{U(x{,}0)-U(0{,}0)}{x}=0=\frac{\partial V(0{,}0)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U(0{,}0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{U(0,y)-U(0{,}0)}{y}=0=-\frac{\partial V(0{,}0)}{\partial x}.$$

Покажемо, що не існує границя $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy}}{x+iy}$.

Виберемо два різних шляхи прямування $z\to 0$:

1) нехай $z=x+i0\to 0, x\to 0, y=0$, тоді $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$;

2) нехай $z=t+it\to 0,\ x=y=t\to 0,\ t>0$, тоді

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{t^2}}{t+it}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{t+it}=\frac{1}{1+i}\neq 0.$$

За означенням функція $f(z)$ не є диференційовною в точці $z_0=0$. Зауважимо, що в умовах теореми про необхідні й достатні умови диференційовності функції в точці не виконуються умови диференційовності функції $U(x,y)=\sqrt{xy}$ у відповідній точці як дійсної функції двох дійсних змінних. ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Навести приклад функції, що не є диференційовною в жодній точці комплексної площини.
2. Визначити параметри $\{a,b,c\}\in\mathbf{R}$ таким чином, щоб функція $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$ була диференційовна в усій комплексній площині.
3. Визначити області, в яких функція $f(z)=|x^2-y^2|+2i|xy|,\ z=x+iy$ є диференційовною.
4. Чи може функція бути диференційовною в точці, але не аналітичною в точці? Навести приклади.
5. Нехай функція $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ має в точці $z\in\mathbf{C}$ властивості:

1) дійсні функції $U(x,y),\ V(x,y)$ диференційовні у відповідній точці

як дійсні функції двох дійсних змінних;

2) існує границя $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta f(z)|}{|\Delta z|}$.

Довести, що або функція $f(z)$, або функція $\overline{f(z)}$ диференційовна в точці $z\in\mathbf{C}$.

6. Дослідити на диференційовність та аналітичність такі функції:

а) $f(z)=\operatorname{Re} z^2$; б) $f(z)=(\operatorname{Im} z)^2$; в) $f(z)=\bar{z}^2$;

г) $f(z)=z\bar{z}^2$; д) $f(z)=e^z$; е) $f(z)=\cos z$.

7. Чи завжди деяка неперервно-диференційовна дійсна функція двох дійсних змінних визначає дійсну або уявну частину аналітичної функції. Розглянути приклад $\varphi(x,y)=x^2+y^2$.

8. Нехай $\varphi(x,y)$ – двічі неперервно-диференційовна функція. Чи існує гармонічна функція $U(x,y)$ зазначеного вигляду, що відмінна від сталої? Якщо існує, знайти її вигляд.

а) $U(x,y)=\varphi(x)$; б) $U(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$.

9. Визначити аналітичну функцію $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, якщо задано її дійсну або уявну частину:

а) $U(x,y)=c=\text{const}$; б) $U(x,y)=x^2-y^2$;

в) $V(x,y)=3+x^2-y^2-\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Функцію комплексної змінної $f(z)$ можна записати як функцію змінних $z,\bar{z}$. Довести, що умови Коші-Рімана у змінних $z,\bar{z}$ мають вигляд $\dfrac{\partial f}{\partial z}=f'(z), \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, де оператори диференціювання визначені таким чином: $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

2. Нехай функція комплексної змінної $f(z)=U(r,\varphi)+iV(r,\varphi)$ записана дійсною та уявною частинами в полярних координатах. Довести, що умови Коші-Рімана в полярних координатах мають вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi},\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-\frac{\partial V}{\partial r}.$$

3. Нехай функція $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ має в точці $z\in\mathbf{C}$ властивості:
1) дійсні функції $U(x,y), V(x,y)$ диференційовні у відповідній точці як дійсні функції двох дійсних змінних;
2) існує границя $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$.
Довести, що функція $f(z)$ диференційовна в точці $z\in\mathbf{C}$.

4. Дослідити на диференційовність та аналітичність такі функції:
а) $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$; б) $f(z)=\operatorname{Im} z^2$; в) $f(z)=z^2$;
г) $f(z)=z^2\bar{z}$; д) $f(z)=z^n, n\in\mathbf{N}$; е) $f(z)=\sin z$.

5. Нехай $\varphi(x,y)$ – двічі неперервно-диференційовна функція. Чи існує гармонічна функція $U(x,y)$ зазначеного вигляду, що відмінна від сталої? Якщо існує, знайти її вигляд.
а) $U(x,y)=\varphi(xy)$; б) $U(x,y)=\varphi(x/y)$.

6. Нехай $\varphi(x,y)$ – гармонічна функція. Для яких двічі неперервно-диференційовних функцій g функція $g(\varphi(x,y))$ також є гармонічною?

7. Чи може функція $\varphi(x,y)=100(x^2+y^2)+\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ визначати дійсну або уявну частину аналітичної в деякій області функції?

8. Визначити аналітичну функцію $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, якщо задано її дійсну або уявну частину:
а) $V(x,y)=2xy$; б) $U(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

Заняття 4. Дробово-лінійне відображення

1. Теоретичні питання

1. Означення дробово-лінійної функції. Теорема про гомеоморфізм, теорема про конформність дробово-лінійного відображення. Елементарні дробово-лінійні відображення.
2. Властивості дробово-лінійного відображення: кругова властивість, властивість симетричних точок.
3. Теорема про існування та єдиність дробово-лінійної функції, що відображає відповідно три задані різні точки в три задані різні точки комплексної площини розширеної.

Означення. Дробово-лінійною функцією називають функцію вигляду

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \{a,b,c,d\} \in \mathbf{C}, ad - bc \neq 0. \qquad (4.1)$$

Зауважимо, що при $c = 0$ маємо лінійну функцію $w = f(z) = Az + B, \{A, B\} \in \mathbf{C}$, що є частинним випадком дробово-лінійної функції.

Функція (4.1) визначена в усіх точках комплексної площини, крім точки $z = -d/c$. Вважається, що дробово-лінійна функція (4.1) переводить точку $z = -d/c$ в точку $w = \infty$, а точку $z = \infty$ в точку $w = a/c$. Довизначена зазначеним способом дробово-лінійна функція (4.1) відображає $\overline{\mathbf{C}}$ в $\overline{\mathbf{C}}$.

Відображення дробово-лінійною функцією (4.1) є гомеоморфізмом (неперервним, взаємно-однозначним відображенням) розширеної комплексної площини на себе.

Відображення дробово-лінійною функцією (4.1) є конформним відображенням розширеної комплексної площини на себе.

Будь-яку дробово-лінійну функцію можна записати так:

$$w = f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)}, \; c \neq 0, \; ad - bc \neq 0, \text{ або}$$

$$w = f(z) = A + B \cdot \frac{1}{(z+D)}, \; A = \frac{a}{c}, \; B = \frac{bc-ad}{c^2}, \; D = \frac{d}{c},$$

тобто дробово-лінійна функція є послідовним виконанням елементарних дробово-лінійних відображень:

1) паралельного перенесення площини на відповідний вектор $w = z + h, h \in \mathbf{C}$;

2) подібності з центром в точці $z = 0$ $w = \lambda z, \lambda \in \mathbf{R}^+$;

3) повороту площини на відповідний кут відносно точки $z = 0$ в додатному напрямку $w = e^{i\alpha} z, \alpha \in \mathbf{R}$;

4) інверсії $w = 1/z$.

Означення. Точки $\{z, z^*\} \subset \mathbf{C}$ називаються симетричними відносно кола з центром в точці $z_0 \in \mathbf{C}$ радіуса R, $0 < R < \infty$, якщо ці точки лежать на одному промені, який виходить із центра кола, і задовольняють співвідношення $|z - z_0||z^* - z_0| = R^2$.

Симетричні відносно кола точки очевидно визначаються із співвідношення

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}.$$

Точки симетричні відносно прямої (кола в широкому розумінні) визначаються стандартним чином.

Відображення, що переводить точку $z \in \overline{\mathbf{C}}$ в точку $z^* \in \overline{\mathbf{C}}$, симетричну відносно даного кола, називають відображенням симетрії.

Властивості дробово-лінійних функцій:

1) **групова властивість:** сукупність усіх дробово-лінійних функцій утворює неабелеву групу, де груповою операцією розглядають суперпозицію дробово-лінійних функцій;

2) **кругова властивість:** при дробово-лінійному відображенні кола в широкому розумінні переходять у кола в широкому розумінні;

3) **властивість збереження симетричних точок:** дробово-лінійна функція симетричні відносно кола в широкому розумінні точки переводить у симетричні відносно образу кола точки;

4) **властивість відображення трьох різних точок у три різні точки відповідно:** існує єдина дробово-лінійна функція, що переводить три задані різні точки $\{z_1, z_2, z_3\} \in \overline{\mathbf{C}}$ в три задані різні точки $\{w_1, w_2, w_3\} \in \overline{\mathbf{C}}$ відповідно, і визначається із співвідношення

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \qquad (4.2)$$

Якщо до даних наборів точок входить нескінченно віддалена точка, то в співвідношенні (4.2) множники, що містять цю точку, заміняють 1.

2. Приклади розв'язування задач

1. Знайти образ області $D = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \arg z < \pi/2\}$ при відображенні $w = \dfrac{z - i}{z + i}$.

► Область D - однозв'язна, границя області D визначається відповідно $\partial D = \{z \in \mathbf{C} : \arg z = \pi/2\} \cup \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} : \arg z = 0\}$. Виберемо додатний напрямок обходу по границі області. Область залишається зліва відносно напрямку обходу (рис. 4.1).

Знайдемо образ границі області при даному дробово-лінійному відображенні, тобто знайдемо образи променів $\{z \in \mathbf{C} : \arg z = \pi/2\}$ та

$\{z \in \mathbf{C} : \arg z = 0\}$. За властивістю конформності дробово-лінійної функції та властивістю збереження напрямку обходу вздовж границі області визначимо образ області D.

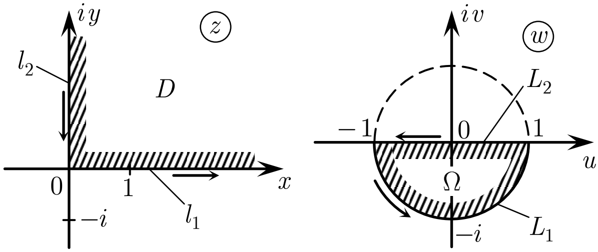

Рис. 4.1

Дана дробово-лінійна функція $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ очевидно задовольняє співвідношення $w(i) = 0, w(-i) = 1, w(0) = -1, w(\infty) = 1$. За круговою властивістю дробово-лінійних функцій маємо, що уявна вісь при даному відображенні очевидно переходить у дійсну вісь, зокрема образ променя $\{z \in \mathbf{C} : \arg z = \pi/2\}$ є відрізок $[-1,1]$, що проходиться у напрямку від точки $z = 1$ до точки $z = -1$ відповідно.

Дана дробово-лінійна функція $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ дійсну вісь переводить у точки кола скінченного радіуса, що проходить відповідно через точки $z = 1$ та $z = -1$ ортогонально дійсній осі за круговою властивістю та властивістю конформності дробово-лінійних функцій. Очевидно визначається коло одиничного радіуса з центром в точці $z = 0$. Зокрема, образ променя $\{z \in \mathbf{C} : \arg z = 0\}$ є одиничне півколо в нижній півплощини, що обходиться у напрямку від точки $z = -1$ до точки $z = 1$ відповідно.

За властивістю конформності дробово-лінійної функції та властивістю збереження напрямку обходу вздовж границі області образ області D є область $\Omega = \{w \in \mathbf{C} : |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$, що є одиничним півкругом у нижній півплощині (рис. 4.1). ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Точка z_0 називається нерухомою точкою відображення $w = f(z)$, якщо $f(z_0) = z_0$. Знайти нерухому точку лінійної функції.

2. Знайти функцію, що відображає:

а) внутрішність трикутника з вершинами в точках $0,\ 1,\ i$ на внутрішність трикутника з вершинами в точках $0,\ 2,\ 1+i$;

б) смугу $\{a < \operatorname{Re} z < a+h\},\ a \in \mathbf{R},\ h > 0$ на смугу $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

3. Для функції $w = 1/z$ знайти образи ліній:

а) сімейства кіл $\{z = x+iy \in \mathbf{C} : x^2 + y^2 = ax\},\ a \in \mathbf{R}$;

б) сімейства паралельних прямих $\{z = x+iy \in \mathbf{C} : y = kx+b\},\ \{k, b\} \in \mathbf{R}$.

4. Визначити образ дійсної вісі при відображенні дробово-лінійною функцією $w = \dfrac{z-z_1}{z-z_2},\ \{z_1, z_2\} \in \mathbf{C},\ \operatorname{Im} z_2 \neq 0$.

5. Визначити дробово-лінійну функцію, яка переводить точки $-1,\ 0,\ 1$ в точки $1,\ i,\ -1$ відповідно. З'ясувати, що є образом верхньої півплощини при відображенні.

6. Визначити дробово-лінійну функцію, яка переводить точки $-1,\ i,\ \infty$ в точки $i,\ 1+i,\ 1$ відповідно.

7. Визначити образи областей при заданих відображеннях:

а) $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при $w = \dfrac{2z-i}{iz+2}$;

б) $\{z \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ при $w = \dfrac{z-1}{z}$.

8. Відобразити на смугу $\{w \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ множини:

а) $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \left\{z \in \mathbf{C} : \left|z - d/2\right| \le d/2\right\},\ d > 0$;

б) $\left\{z \in \mathbf{C} : \left|z - d_1/2\right| > d_1/2, \left|z - d_2/2\right| < d_2/2\right\},\ 0 < d_1 < d_2$.

9. * Довести конформність дробово-лінійної функції в розширеній комплексній площині.

10. * Довести, що довільне коло в широкому розумінні при дробово-лінійному відображенні відображається в коло в широкому розумінні.

11. * Довести, що дві точки є симетричними відносно кола Γ тоді й тільки тоді, коли довільне коло в широкому розумінні, що проходить через дані точки, є ортогональним до даного кола Γ.

12. * Довести, що дробово-лінійна функція симетричні відносно кола в широкому розумінні точки переводить в симетричні відносно образу кола точки.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Знайти загальний вигляд функції, яка залишає півплощину $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ на місці.

2. Знайти симетричний образ ліній відносно одиничного кола:

а) $\{z = x + iy \in \mathbf{C} : y = 2\}$;

б) $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = |z_0|\}, z_0 \in \mathbf{C}$.

3. Для функції $w = 1/z$ знайти образи ліній:

а) сімейства кіл $\{z = x + iy \in \mathbf{C} : x^2 + y^2 = ay\}, a \in \mathbf{R}$;

б)* сімейства прямих $\{z = x + iy \in \mathbf{C} : y = kx\}, k \in \mathbf{R}$;

в)* параболи $\{z = x + iy \in \mathbf{C} : y = x^2\}$.

4. Визначити образ прямокутної сітки $\{z = x + iy \in \mathbf{C} : y = c, x = c\}$, $c \in \mathbf{R}$ при відображенні дробово-лінійною функцією $w = \dfrac{1}{z - z_0} + h$, $\{z_0, h\} \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$.

5. Визначити дробово-лінійну функцію, яка переводить точки -1, i, ∞ у точки ∞, i, -1 відповідно. З'ясувати, що є образом верхньої півплощини при відображенні?

6. Визначити образи областей при заданих відображеннях:

а) $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}$ при $w = \dfrac{z}{z-1}$;

б) $\{z \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ при $w = \dfrac{z-1}{z-2}$;

в) $\{z \in \mathbf{C} : 0 < \arg z < \pi/4\}$ при $w = \dfrac{z}{z-1}$

7. Відобразити на смугу $\{w \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ множини:

а) $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z - i| > 1\}$; б) $\{z \in \mathbf{C} : |z - 2i| > 2, |z + 2i| > 2\}$;

в) $\left\{z \in \mathbf{C} : \left|z + d_1/2\right| > d_1/2, \left|z - d_2/2\right| > d_2/2\right\}$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Заняття 5. Дробово-лінійні ізоморфізми і автоморфізми

1. Теоретичні питання

1. Означення дробово-лінійного ізоморфізму та автоморфізму. Теорема про дробово-лінійний ізоморфізм кругів у розширеній комплексній площині.
2. Клас дробово-лінійних ізоморфізмів верхньої півплощини на одиничний круг.
3. Клас дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга.

Означення. Дробово-лінійне відображення $f(z): D_1 \to D_2$ областей D_1 на D_2 називають дробово-лінійним ізоморфізмом областей.

Означення. Дробово-лінійне відображення $f(z): D \to D$ області D на себе називають дробово-лінійним автоморфізмом області D.

Визначають клас дробово-лінійних ізоморфізмів верхньої півплощини на одиничний круг, які задовольняють умову $w(a)=0, \operatorname{Im} a > 0$:

$$w = f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \varphi \in \mathbf{R}. \tag{5.1}$$

Серед усіх ізоморфізмів (5.1) існує єдиний, що задовольняє умову $\arg w'(a) = \alpha_0, \alpha_0 \in \mathbf{R}$ - фіксоване. Шуканий ізоморфізм визначається із співвідношення (5.1) відповідно

$$w = f(z) = e^{i(\alpha_0 + \pi/2)} \cdot \frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

Визначають клас дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга, які задовольняють умову $w(a)=0, |a|<0$:

$$w = f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \varphi \in \mathbf{R}. \tag{5.2}$$

Серед усіх автоморфізмів (5.2) існує єдиний, що задовольняє умову $\arg w'(a) = \alpha_0, \alpha_0 \in \mathbf{R}$ - фіксоване. Шуканий ізоморфізм визначається із співвідношення (5.2) відповідно

$$w = f(z) = e^{i\alpha_0} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

2. Приклади розв'язування задач

1. Визначити клас дробово-лінійних ізоморфізмів верхньої півплощини на одиничний круг, які задовольняють умову

$w(a)=0, \operatorname{Im} a>0$. Серед усіх ізоморфізмів верхньої півплощини на одиничний круг визначити ізоморфізм, що задовольняє умову $\arg w'(a)=\alpha_0, \alpha_0 \in \mathbf{R}$ - фіксоване.

► 1) визначимо клас дробово-лінійних ізоморфізмів верхньої півплощини на одиничний круг, які задовольняють умову $w(a)=0, \quad \operatorname{Im} a>0$.

Дробово-лінійна функція за властивістю зображення симетричних точок симетричні відносно кола точки переводить у симетричні відносно образу кола точки. Зауважимо, що границя даної області – дійсна вісь є пряма, тобто коло в широкому розумінні. Тоді очевидно, що симетрична до точки $a \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} a>0$ відносно дійсної осі точка $\bar{a} \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} \bar{a}<0$ при відображенні дробово-лінійною функцією переходить у симетричну до точки 0 відносно образу кола (одиничного кола з центром в точці 0) точку ∞. Зрозуміло, що клас дробово-лінійних ізоморфізмів можна записати у вигляді

$$w=f(z)=k\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \ k \in \mathbf{C}.$$

Враховуючи, що точки границі верхньої півплощини (дійсної осі) переходять при дробово-лінійному відображенні в точки границі одиничного круга (одиничне коло з центром в точці 0), зокрема маємо $|f(0)|=|k|\left|\frac{0-a}{0-\bar{a}}\right|=|k|=1, \ k \in \mathbf{C}$. Тоді очевидно $k=e^{i\varphi}, \ \varphi \in \mathbf{R}$. Клас дробово-лінійних ізоморфізмів верхньої півплощини на одиничний круг, які задовольняють умову $w(a)=0, \operatorname{Im} a>0$:

$$w=f(z)=e^{i\varphi}\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \varphi \in \mathbf{R}.$$

2) серед усіх ізоморфізмів верхньої півплощини на одиничний круг визначимо ізоморфізм, що задовольняє умову $\arg w'(a)=\alpha_0, \ \alpha_0 \in \mathbf{R}$ – фіксоване. Використовуючи загальний вигляд дробово-лінійного ізоморфізму верхньої півплощини на одиничний круг, який задовольняє умову $w(a)=0, \ \operatorname{Im} a>0$, тобто формулу (5.1), продиференціюємо (5.1) за змінною z та підставимо $z=a$, враховуючи задану умову $w(a)=0$. Отримаємо

$$w'(a)=e^{i\varphi}\frac{1}{a-\bar{a}}=e^{i\varphi}\frac{1}{2i\operatorname{Im} a}=e^{i(\varphi-\pi/2)}\frac{1}{2\operatorname{Im} a}, \quad \operatorname{Im} a>0.$$

Тоді маємо $\arg w'(a) = \varphi - \pi/2 = \alpha_0$, або $\varphi = \alpha_0 + \pi/2$. Остаточно шуканий ізоморфізм має вигляд $w = f(z) = e^{i(\alpha_0 + \pi/2)} \cdot \dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$. ◄

2. Визначити клас дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга, який задовольняє умову $w(a) = 0, |a| < 1$. Серед усіх автоморфізмів одиничного круга визначити автоморфізм, що задовольняє умову $\arg w'(a) = \alpha_0, \ \alpha_0 \in \mathbf{R}$ - фіксоване.

► 1) визначимо клас дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга, які задовольняють умову $w(a) = 0, |a| < 1$. Дробово-лінійна функція (за властивістю зображення симетричних точок) симетричні відносно кола точки переводить у симетричні відносно образу кола точки. Зауважимо, що границя даної області – одиничне коло. Тоді очевидно, що симетрична до точки $a, |a| < 1$ відносно одиничного кола точка $\dfrac{1}{\bar{a}} \in \mathbf{C}$ при відображенні дробово-лінійною функцією переходить у симетричну до точки 0 відносно образу кола (одиничного кола з центром в точці 0) точку ∞. Зрозуміло, що клас дробово-лінійних автоморфізмів можна записати у вигляді

$$w = f(z) = k\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \ k \in \mathbf{C}.$$

Ураховуючи, що точки границі одиничного круга (одиничного кола з центром у точці 0) переходять при дробово-лінійному відображенні в точки границі одиничного круга (одиничне коло з центром у точці 0), зокрема маємо $|f(1)| = |k| \left|\dfrac{1-a}{1-\bar{a}}\right| = |k| = 1, \ k \in \mathbf{C}$. Тоді очевидно $k = e^{i\varphi}, \ \varphi \in \mathbf{R}$. Клас дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга, які задовольняють умову $w(a) = 0, |a| < 1$ має вигляд

$$w = f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \varphi \in \mathbf{R}.$$

2) серед усіх автоморфізмів одиничного круга визначимо автоморфізм, що задовольняє умову $\arg w'(a) = \alpha_0, \alpha_0 \in \mathbf{R}$ – фіксоване. Використовуючи загальний вигляд дробово-лінійного автоморфізму одиничного круга, який задовольняє умову $w(a) = 0, |a| < 1$, тобто формулу (5.2), продиференціюємо (5.2) за змінною z та підставимо $z = a$, врахову-

чи задану умову $w(a)=0$. Отримаємо

$$w'(a)=e^{i\varphi}\frac{1}{1-\bar{a}a}=e^{i\varphi}\frac{1}{1-|a|^2},\quad |a|<1.$$

Тоді маємо $\arg w'(a)=\varphi=\alpha_0$, або $\varphi=\alpha_0$. Остаточно шуканий ізоморфізм має вигляд $w=f(z)=e^{i\alpha_0}\cdot\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Відобразити верхню півплощину на круг $\{w:|w-w_0|<R\},\ 0<R<+\infty$ так, щоб точка $z=i$ перейшла в центр кола, а похідна в цій точці $w'(z)|_{z=i}>0$ була додатна.

2. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм даного круга $\{z:|z|<r\},\ 0<r<+\infty$ на верхню півплощину, що задовольняє умови: $w(0)=2i$, $\arg w'(0)=\pi$.

3. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм даного круга $\{z:|z|<r\},0<r<+\infty$ на круг $\{w:|w|<R\},0<R<+\infty$, що задовольняє умови: $w(a)=b,\ \arg w'(a)=\pi/2$, де $|a|<r,\ |b|<R$.

4. * Знайти загальний вигляд дробово-лінійного автоморфізму верхньої півплощини, який задовольняє умову $w(a)=b,\ \ \operatorname{Im}a>0,\ \ \operatorname{Im}b>0$. Серед всіх автоморфізмів верхньої півплощини визначити автоморфізм, що задовольняє умову $\arg w'(a)=\alpha_0,\ \alpha_0\in\mathbf{R}$ - фіксоване.

5. * Відобразити кільце $\{z:2<|z|<5\}$ на кільце $\{w:4<|w|<10\}$ так, щоб виконувалась умова $w(5)=4$.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм даного круга $\{z:|z-z_0|<r\},0<r<+\infty$ на круг $\{w:|w-w_0|<R\},0<R<+\infty$, що задовольняє умови: $w(z_0)=w_0,\ \arg w'(z_0)=\pi$.

2. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм даного круга $\{z:|z|<r\},0<r<+\infty$ на верхню півплощину $\{w:\operatorname{Re}w>0\}$, що задовольняє умови: $w(a)=b,\ \arg w'(a)=\pi$, де $|a|<r,\ b>0$.

3. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм верхньої півплощини на

круг $\{w : |w - w_0| < R\}, 0 < R < +\infty$, що задовольняє умови: $w(a) = b,\ \operatorname{Im} a > 0,\quad |b - w_0| < R$, похідна у відповідній точці $w'(z)|_{z=a} > 0$ була додатна.

4. * Відобразити двозв'язну область $\{z : \operatorname{Re} z > 0, |z - 2| > 1\}$ на кільце $\{w : r < |w| < 1\}$. Знайти радіус внутрішнього кола.

Указівка: скористатися властивістю інваріантності симетричних точок при дробово-лінійному відображенні.

Заняття 6. Степенева функція. Обернене відображення

1. Теоретичні питання

1. Означення степеневої функції. Властивості степеневих функцій. Області однолисності. Конформність відображення степеневою функцією.
2. Обернене до степеневої відображення. Поверхня Рімана. Гілки однозначності. Точки розгалуження відображення.

Означення. Функція вигляду $w = f(z) = z^n,\ n \in \mathbf{N}$ називається степеневою функцією.

При $n = 1$ степенева функція є лінійною функцією, властивості якої розглянуто при дослідженні дробово-лінійної функції. Тому надалі при дослідженні степеневої функції розглядається випадок $n \in \mathbf{N},\ \ n > 1$.

Степенева функція аналітична в комплексній площині $\mathbf{C}$. Похідна степеневої функції існує в усіх точках $z \in \mathbf{C}$, причому

$$w' = f'(z) = nz^{n-1},\ \ n \in \mathbf{N},\ \ n > 1.$$

Степенева функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини, крім точки $z = 0$. Зауважимо, що в точках $z = 0$ та $z = \infty$ степенева функція не є конформною, оскільки не виконує властивість збереження кутів конформних відображень. Кути між кривими з вершиною в точці $z = 0$ та в точці $z = \infty$ степенева функція $w = f(z) = z^n = |z|^n e^{in(\arg z)},\ n > 1$ збільшує в n разів.

Степенева функція $w = f(z) = z^n = |z|^n e^{in(\arg z)},\ n > 1$ не є однолисною, кожен сектор

$$\{z : z = re^{i\varphi},\ 0 < r < \infty,\ \ \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi/n\},\ \ \alpha \in \mathbf{R} \qquad (6.1)$$

взаємно однозначно (однолисно) відображає на комплексну площину

$\mathbf{C}$ з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $z=0$ і проходить під кутом $n\alpha$. Тобто сектор (6.1) є областю однолисності степеневої функції, а комплексну площину можна розбити на n областей однолисності. Таким чином, при відображенні степеневою функцією комплексна площина $\mathbf{C}$ "накриває" сама себе n разів.

При відображенні степеневою функцією $w=f(z)=z^n, n\in\mathbf{N}, n>1$ розширена комплексна площина переходить у себе таким чином, що кожна точка $w\in\overline{\mathbf{C}}$ має n прообразів, що визначаються

$$z_k=\sqrt[k]{|w|}\cdot e^{i\left(\frac{\arg w+2\pi k}{n}\right)},\quad k=\overline{0,n-1}. \tag{6.2}$$

Для степеневої функції можна визначити обернене відображення $z=\sqrt[n]{w}$. Для цього розглянемо степеневу функцію $w=f(z)=z^n$ на множинах

$$D_k=\{z: z=re^{i\varphi},\ 0\le r<\infty,\ \ 2\pi k/n\le\varphi<2\pi(k+1)/n\},\quad k=\overline{0,n-1},$$

кожну з яких при відповідному фіксованому k степенева функція однолисно відображає на комплексну площину $\mathbf{C}$. При цьому очевидно $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}D_k=\mathbf{C}$. Кожну з областей (стандартних областей однолисності) вигляду $\{z: z=re^{i\varphi},\ 0<r<\infty,\ \ 2\pi k/n<\varphi<2\pi(k+1)/n\},\quad k=\overline{0,n-1}$ степенева функція взаємно однозначно відображає на комплексну площину $\mathbf{C}$ з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $z=0$ і проходить під кутом 0.

Розглянемо n листів комплексних площин $\mathbf{C}$ з розрізами уздовж додатної частини дійсної осі. Розташуємо ці площини одна над одною. Нижній край розрізу верхньої площини "склеїмо", тобто ототожнимо з верхнім краєм розрізу нижньої площини і проробимо цю дію відповідну кількість разів. На останньому кроці нижній край розрізу n площини "склеїмо" з верхнім краєм розрізу першої площини. Отримали поверхню, що складається з n листів, причому степенева функція здійснює неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини на n-лисну поверхню. Визначимо обернене відображення до степеневої функції таким чином: при кожному фіксованому k, $k=\overline{0,n-1}$ довільному комплексному числу w, розташованому на відповідному листі n-лисної поверхні, єдиним чином ставиться у відповідність певне комплексне число $z_k \in D_k$, ${z_k}^n = w$. Тобто на комплексній площині визначають n різних однозначних функцій, що в сукупності називають багатозначним відображенням, оберненим до степеневої функції, і позначають $z = \sqrt[n]{w}$. Відповідні однозначні функції, що визначають із співвідношення (6.2),

$$z_k = \sqrt[k]{|w|} \cdot e^{i\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

називають гілками однозначності багатозначного відображення $z = \sqrt[n]{w}$.

Остаточно, при відображенні $z = \sqrt[n]{w}$, оберненим до степеневої функції, $\forall w \in \overline{\mathbf{C}}$ ставиться у відповідність рівно n різних значень, що визначають із співвідношення (6.2). Описану вище поверхню називають n-лисною поверхнею Рімана відображення $z = \sqrt[n]{w}$.

Зауважимо, що точки, при обході яких по замкнених контурах відбувається перехід з одного листа поверхні Рімана на інший, називаються точками розгалуження відповідного відображення. Якщо за скінченну кількість обходів n замкненим контуром навколо точки розгалуження здійснюється перехід на початковий лист поверхні Рімана, таку точку розгалуження називають алгебраїчною точкою розгалуження $(n-1)$-го порядку. Для відображення $z = \sqrt[n]{w}$ точки $w = 0$ та $w = \infty$ є алгебраїчними точками розгалуження $(n-1)$-го порядку.

2. Приклади розв'язування задач

1. Конформно відобразити область, що визначається як кут з розрізом $\{z : 0 < \arg z < \pi/2\} \setminus \{z : z = \rho e^{i\pi/4}, \rho \ge 1\}$ на область $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 6.1, а).

► Границя даної області складається з частин: додатної частини дійсної осі $\gamma_1 = \{z : \operatorname{Re} z \ge 0, \operatorname{Im} z = 0\}$, частини уявної вісі в верхній півплощині $\gamma_2 = \{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \ge 0\}$ та точок розрізу $\gamma_3 = \{z : z = \rho e^{i\pi/4}, \rho \ge 1\}$. Область симетрична відносно променя, вздовж якого розташовано розріз.

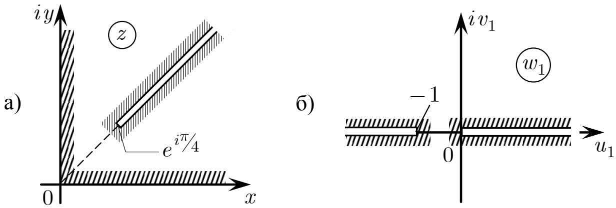

Рис. 6.1

Використаємо властивість степеневої функції $w = f(z) = z^n$, $n > 1$, що збільшує в n разів кути між кривими з вершиною в точці $z = 0$ та перетворимо задану область на всю комплексну площину з розрізами по дійсній осі. Для цього застосуємо відображення $w_1 = z^4$, при якому кут між кривими γ_1, γ_2 збільшиться в 4 рази, тобто образом даного кута є кут з вершиною в початку координат величиною 2π. У результаті отримаємо область, що є комплексною площиною з розрізами по додатній частині дійсної вісі та по променю дійсної осі $\{w_1 : w_1 = \rho e^{i\pi}, \rho \geq 1\}$, що відповідний γ_3 (рис. 6.1, б). Зауважимо, що таким чином отримано область – комплексну площину з розрізом по відрізку прямої, що проходить через нескінченно віддалену точку.

За допомогою дробово-лінійної функції перетворимо одержану область на комплексну площину з розрізом по додатній частині дійсної осі. Для цього переведемо точку 0 в точку 0 , а точку -1 в точку ∞ і скористаємося властивостями дробово-лінійної функції. Одержуємо функцію $w_2 = \dfrac{w_1}{w_1 + 1}$.

До одержаної області застосуємо відображення обернене до степеневої функції $w_3 = \sqrt{w_2}$ з вибором гілки однозначності $\sqrt{1} = 1$, що комплексну площину переводить на верхню півплощину.

Остаточно шукана функція будується як композиція зазначених відображень, а саме $w = w_3(w_2(w_1(z)))$. ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Що є образом указаних множин точок при відображенні степеневою функцією $w = f(z) = z^n$, $n > 1$:

а) $\{z : \arg z = \alpha\}, \alpha \in \mathbf{R}$;

б) $\{z: \alpha < \arg z < \beta\}$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi/n$.

2. Що є образом вказаних областей при відображенні степеневою функцією $w = f(z) = z^3$:

а) $\{z: 0 < \arg z < \pi/3\}$; $\{z: 0 < \arg z < 2\pi/3\}$; $\{z: |\arg z| < \pi/3\}$;

б) $\{z: |z| < 1, \pi/3 < \arg z < 2\pi/3\}$; $\{z: |z| > 1/2,\ 2\pi/3 < \arg z < \pi\}$.

3. Що є образом указаних областей при відображенні $w = \sqrt{z}$, де вітка однозначності задається значенням функції в точці:

а) $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, гілка задана відповідно $\sqrt{i} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

б) $\{z: |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, гілка задана відповідно $\sqrt{\frac{i}{2}} = \frac{1+i}{2}$;

в) $\{z: |z| > 1,\ 3\pi/4 < \arg z < 5\pi/4\}$, гілка задана відповідно $\sqrt{-1} = i$.

4. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ вказані області:

а) $\{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;

б) розширену комплексну площину з розрізом по відрізку $\overline{\mathbf{C}} \setminus [z_1, z_2]$, $\{z_1, z_2\} \subset \mathbf{C}$;

в) розширену комплексну площину з розрізом по дійсній осі $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [0, +\infty]\}$;

г) $\{z: |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| > \sqrt{2}\}$; д) $\{z: \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, ih]$, $h > 0$;

е) $\{z: |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$; ж) $\{z: |z| < 1\} \setminus [0, 1]$;

з) * $\{z: |z| > 1\} \setminus \{[-2, -1] \cup [1, 2]\}$;

і) * $\{z: \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z: z = e^{i\varphi}, 0 < \varphi < \alpha\}$, $\alpha \in (0, \pi)$.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Що є образом указаних областей при відображенні степеневою функцією $w = f(z) = z^3$:

а) $\{z: |z| = 1/2,\ 0 < \arg z < \pi/3\}$;

б) $\{z: |z| < 1/2,\ \pi/3 < \arg z < 2\pi/3\}$.

2. Що є образом указаних областей при відображенні $w = \sqrt{z}$, де гілка однозначності задається значенням функції в точці:

а) $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, гілка задана відповідно $\sqrt{-1} = i$;

б) $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, гілка задана відповідно $\sqrt{-1} = -i$;

в) $\{z : |z| < 1\} \setminus [0,1]$, гілка задана відповідно $\sqrt{1} = 1$;

г) $\{z : |z| < 1\} \setminus [0,1]$, гілка задана відповідно $\sqrt{1} = -1$.

3. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ вказані області:

а) $\{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$;

б) $\{z : |z - i| < \sqrt{2}, |z + i| < \sqrt{2}\}$;

в) $\{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [1, 2]$;

г) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [ih, +i\infty]$, $h > 0$;

д) $\{z : |z| < 2\} \setminus \{[-2i, -i] \cup [i, 2i]\}$;

е) $\{z : |z| > 1\} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [1, 2]\}$;

ж) $\{z : 0 < \arg z < 2\alpha\} \setminus \{z : \arg z = \alpha, |z| > 1\}$, $\alpha \in (\pi/2, \pi)$

з) * Зовнішність одиничного кола $\{z : |z| > 1\}$ з розрізом по дузі кола $\{z : |z - i - 1| = 1\}$ від точки $z = i$ до точки $z = i + 2$.

Заняття 7. Показникова функція. Обернене відображення логарифма

1. Теоретичні питання

1. Означення показникової (експоненціальної) функції. Властивості показникових функцій. Області однолисності. Конформність відображення показниковою функцією.
2. Обернене до показникової функції відображення логарифма. Поверхня Рімана. Гілки однозначності. Точки розгалуження відображення.

Означення. Функція вигляду

$$w = f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy$$

називається показниковою (експоненціальною) функцією.

Показникова функція e^z є продовженням у комплексну площину $\mathbf{C}$ дійсної показникової функції e^x, визначеної на дійсній осі $\mathbf{R}$.

Показникова функція аналітична в комплексній площині $\mathbf{C}$. Похідна степеневої функції існує в усіх точках $z \in \mathbf{C}$, причому

$$w' = f'(z) = e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Показникова функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини.

Показникова функція є періодичною з основним періодом $2\pi i$.

Показникова функція $w = f(z) = e^z$ не є однолисною, кожну смугу

$$\{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}, \alpha \in \mathbf{R} \qquad (7.1)$$

взаємно однозначно (однолисно) відображає на комплексну площину $\mathbf{C}$ з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $z = 0$ і проходить під кутом α. Тобто смуга (7.1) є областю однолисності показникової функції, а комплексну площину можна розбити на зліченну кількість областей однолисності. Таким чином при відображенні степеневою функцією комплексна площина $\mathbf{C}$ "накриває" сама себе зліченну кількість разів.

При відображенні показниковою функцією $w = f(z) = e^z$ комплексна площина $\mathbf{C}$ переходить у себе таким чином, що кожна точка $w \in \mathbf{C}$, крім $w = 0$, має зліченну кількість різних прообразів, що визначаються

$$z = \ln|w| + i(\arg w + 2\pi k), \ \ k \in \mathbf{Z}. \qquad (7.2)$$

Для показникової функції можна визначити обернене відображення логарифму $z = \ln w$. Для цього розглянемо показникову функцію $w = f(z) = e^z$ на множинах $D_k = \{z \in \mathbf{C} : 2\pi k \le \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}, \ k \in \mathbf{Z}$, кожну з яких при відповідному фіксованому k показникова функція однолисно відображає на комплексну площину $\mathbf{C}$. При цьому очевидно $\bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} D_k = \mathbf{C}$. Кожну з областей $\{z \in \mathbf{C} : 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}, \ k \in \mathbf{Z}$ (стандартних областей однолисності) показникова функція взаємно однозначно відображає на комплексну площину $\mathbf{C}$ з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $z = 0$ і проходить під кутом 0.

Розглянемо зліченну кількість листів комплексних площин $\mathbf{C}$ з розрізами по додатній частині дійсної осі. Розташуємо ці площини одна над одною. Нижній край розрізу верхньої площини "склеїмо" (тобто ототожнимо) з верхнім краєм розрізу нижньої площини і проробимо цю дію зліченну кількість разів. Отримали поверхню, що складається із зліченної кількості листів, причому показникова функція здійснює неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини $\mathbf{C}$ на поверхню. Визначимо обернене до показникової функції відображення логарифма таким чином: при кожному фіксованому k довільному комплексному числу w, розташованому на відповідному листі поверхні, єдиним чином ставиться у відповідність певне комплексне число $z_k \in D_k$, $e^{z_k} = w$. Тобто на комплексній площині визначають зліченну кількість різних однозначних функцій, що в сукупності називають багатозначним відображенням логарифма і позначають $z = \ln w$. Відповідні однозначні функції, що визначають із співвідношення (7.2), яких злічення кількість

$$z = \ln|w| + i(\arg w + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z},$$

називають гілками однозначності багатозначного відображення логарифма $z = \ln w$.

Остаточно при відображені $z = \ln w$ - оберненим до показникової функції $\forall w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$ ставиться у відповідність злічення кількість різних значень, що визначають із співвідношення (7.2). Описану вище поверхню називають поверхнею Рімана відображення логарифма $z = \ln w$.

Точки $w = 0$ та $w = \infty$ є точками розгалуження багатозначного відображення логарифма $z = \ln w$. Причому, якщо ні за яку скінченну кількість обходів замкненим контуром навколо точки розгалуження не здійснюється перехід на початковий лист поверхні Рімана, таку точку розгалуження називають точкою розгалуження нескінченного порядку, або логарифмічною точкою розгалуження порядку. Для відображення $z = \ln w$ точки $w = 0$ та $w = \infty$ є логарифмічними точками розгалуження.

2. Приклади розв'язування задач

1. Конформно відобразити область, що визначається як смуга з розрізом, $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\} \setminus [0, +\infty]$ на область, що є смуга $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ (рис. 7.1, а).

► Щоб відобразити дану область на смугу $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$, по-перше, відобразимо область на область, що визначається як внутрішність кута з вершиною в точці 0. Границя даної області складається з частин: горизонтальної прямої $\gamma_1 = \{z : \operatorname{Im} z = \pi\}$, горизонтальної прямої $\gamma_2 = \{z : \operatorname{Im} z = -\pi\}$ та точок розрізу $\gamma_3 = \{z : |z| = \rho, \rho \geq 0\}$.
Дана область симетрична відносно дійсної осі, що містить промінь, уздовж якого розташовано розріз.

Зауважимо, що дана область є областю однолисності показникової функції $w = f(z) = e^z$.

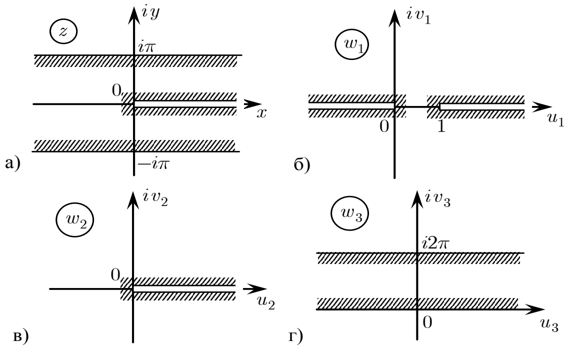

Рис. 7.1

Використаємо властивості показникової функції та перетворимо задану область на всю комплексну площину з розрізами по дійсній осі. В результаті відображення $w_1 = e^z$ отримаємо область, що є комплексною площиною з розрізами по від'ємній частині дійсної осі та по променю дійсної осі $\{w_1 : |w_1| = \rho, \rho \geq 1\}$, що відповідний γ_3 (рис. 7.1, б). Зауважимо, що таким чином отримано область – комплексну площину з розрізом по відрізку дійсної осі, яка проходить через нескінченно віддалену точку.

За допомогою дробово-лінійної функції перетворимо одержану область на комплексну площину з розрізом по додатній частині дійсної осі (рис. 7.1, в). Для цього переведемо точку 0 в точку 0, а точку 1 в точку ∞ та скористаємося властивостями дробово-лінійної функції. Одержуємо функцію $w_2 = \dfrac{w_1}{w_1 - 1}$. (Зауважимо, якщо до одержаної області застосуємо відображення обернене до степеневої функції $\sqrt{w_2}$ з вибором гілки однозначності $\sqrt{1} = 1$, то комплексна площина переходить на верхню півплощину.)

Отриману область відображення логарифма $w_3 = \ln w_2$ з вибором гілки однозначності $w_3 = \ln|w_2| + i\arg w_2$, переводить комплексну площину з розрізом по додатній частині дійсної осі на смугу $\{w_3 \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Im} w_3 < 2\pi\}$ (рис. 7.1, г).

Остаточно відображення подібності $w_4 = w_3 / 2\pi$ одержану смугу відображає на смугу $\{w_4 : 0 < \operatorname{Im} w_4 < 1\}$, що треба було отримати.

Шукана функція будується як композиція вказаних відображень, а саме $w = w_4(w_3(w_2(w_1(z))))$. ◀

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Що є образом указаних множин точок при відображенні показниковою функцією $w = f(z) = e^z$:

а) $\{z : \operatorname{Im} z = a\}, \quad a \in \mathbf{R}$;

б) $\{z : \operatorname{Re} z = a, \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + \beta\}, \quad a \in \mathbf{R}, \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in [0,2\pi)$.

2. Що є образом указаних областей при відображенні показниковою функцією $w = f(z) = e^z$:

а) $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$; $\{z : \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z < 0\}$;

б) $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$.

3. Що є образом указаних областей при відображенні логарифма $w = \ln z$, де гілка однозначності задається значенням функції в точці:

а) $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$, гілка задана відповідно $\ln i = \dfrac{\pi i}{2}$;

б) $\mathbf{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, гілка задана відповідно $\ln i = \dfrac{5\pi i}{2}$.

4. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ указані області:

а) $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}, 0 \leq a < b \leq 2\pi$; б) $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < h, \operatorname{Re} z < 1\}, h > 0$;

в) $\{z : |z| < 2, |z-1| > 1\}$; г) $\{z : |\operatorname{Im} z| < 1\} \setminus [0, i]$;

д) $\{z : |\operatorname{Im} z| < 1\} \setminus [0, +\infty]$; е) $\{z : |z - i| > 1, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$;

ж) $\{z : |z - 2i| > 2, |z + 2i| > 2\} \setminus [-1,1]$.

5. Конформно відобразити на смугу $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ області:

а) сектор $\{z : 0 < \arg z < \alpha\}, \quad \alpha \in (0,2\pi)$;

б) сектор з розрізом $\{z : 0 < \arg z < 2\alpha\} \setminus \{z : z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 1\}, \quad \alpha \in (0, \pi)$.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Що є образом указаних областей при відображенні показниковою функцією $w = f(z) = e^z$:

а) $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$; $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z < 0\}$;

б) $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} < 0\}$.

2. Що є образом указаних областей при відображенні логарифма $w = \ln z$, де гілка однозначності задається значенням функції в точці:

а) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, гілка задана відповідно $\ln 1 = 2\pi i$;

б) $\mathbf{C} \setminus \{\{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 1\} \cup \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}\}$, гілка задана відповідно $\ln 1 = 0$.

3. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ вказані області:

а) $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}, \{a, b\} \in \mathbf{R}$; б) $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < h, \operatorname{Im} z > 0\}, h > 0$;

в) $\{z : |z - 1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$; г) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1\} \setminus [0, 1]$;

д) $\{z : |\operatorname{Im} z| < 1\} \setminus \{[-\infty, -1] \cup [0, +\infty]\}$;

е) $\{z : |z - 1| > 1, |z + 1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;

ж) $\{z : |z - 2i| > 2, |z + 2i| > 2, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [0, 2]$.

4. Конформно відобразити на смугу $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ області:

а) $\{z : 0 < \arg z < \pi\alpha, |z| > 1\}, \alpha \in (0, 2)$;

б) $\{z : |z - i| < \sqrt{2}, |z + i| < \sqrt{2}\} \setminus [0, 1]$.

Заняття 8. Функція Жуковського. Обернене відображення

1. Теоретичні питання

1. Означення функції Жуковського. Властивості функції Жуковського. Відображення функцією Жуковського стандартних множин: кіл із центром у точці $z = 0$, променів, що виходять з точки $z = 0$. Області однолисності. Конформність відображення функцією Жуковського.
2. Обернене до функції Жуковського. Поверхня Рімана. Гілки однозначності. Точки розгалуження відображення.

Означення. Функція вигляду $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ називається функцією Жуковського.

Функція Жуковського визначена та аналітична в усіх точках комплексної площини, крім $z = 0$, причому

$$w' = f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right), \ \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Зауважимо, що $w' = f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$ для $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, крім точок $z = \pm 1$. Довизначимо функцію Жуковського в точках $z = 0$ та $z = \infty$ граничним значенням ∞. Зауважимо, що функцію Жуковського можна записати як композицію дробово-лінійних функцій та степеневої функції, а саме

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}.$$

Тоді за властивостями дробово-лінійної функції та степеневої функції очевидно маємо, що довизначена в розширеній комплексній площині функція Жуковського здійснює конформне відображення в усіх точках $\overline{\mathbf{C}}$, окрім точок $z = \pm 1$.

Функція Жуковського $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ не є однолисною. Області однолисності не можуть вміщувати точок $\{z_1, z_2\} \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $z_1 \neq z_2$, що задовольняють умову $z_1 z_2 = 1$. Комплексну площину стандартно розбивають двома стандартними наборами областей однолисності.

Функція Жуковського кожну область

$$D_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}, \ D_2 = \{z \in \overline{\mathbf{C}} : |z| > 1\} \tag{8.1}$$

взаємно однозначно (однолисно) відображає на розширену комплексну площину $\overline{\mathbf{C}}$ з розрізом уздовж відрізка дійсної осі $[-1,1]$. Тобто області (8.1) є областями однолисності функції Жуковського.

Функція Жуковського кожну область

$$D_1' = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \ D_2' = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z < 0\} \tag{8.2}$$

взаємно однозначно (однолисно) відображає на комплексну площину $\mathbf{C}$ з розрізом уздовж частин дійсної осі $[-\infty,-1]$ та $[1,+\infty]$. Тобто області (8.2) є областями однолисності функції Жуковського

Таким чином, при відображенні функцією Жуковського комплексна площина $\mathbf{C}$ "накриває" сама себе двічі.

Для відображення функцією Жуковського характерні такі геометричні властивості:

1) кола $\{z \in \mathbf{C} : |z| = R\},\ 0 < R < +\infty,\ R \neq 1$ функція Жуковського відображає в точки еліпса $\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$, де $a = \dfrac{1}{2}\left(R + \dfrac{1}{R}\right) > 0,\ b = \pm\dfrac{1}{2}\left(R - \dfrac{1}{R}\right) > 0$ з фокусами в точках ± 1, причому напрямок обходу по колу та по відповідному еліпсу однаковий у випадку $R > 1$ та протилежний у випадку $0 < R < 1$.

Коло $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ функція Жуковського відображає в точки відрізка дійсної осі $[-1,1]$, що обходиться в одному та протилежному напрямку;

2) промені $\{z \in \mathbf{C} : \arg z = \varphi_0\}, \varphi_0 \in \mathbf{R} \setminus \{\pi k/2, k \in \mathbf{Z}\}$ функція Жуковського відображає в точки відповідної гілки гіперболи $\dfrac{u^2}{\cos \varphi_0^2} - \dfrac{v^2}{\sin \varphi_0^2} = 1$ з фокусами в точках ± 1.

Промені $\{z \in \mathbf{C} : \arg z = \varphi_0\}, \varphi_0 = \pi(2k+1)/2, k \in \mathbf{Z}$ функція Жуковського відображає в точки уявної осі, промені $\{z \in \mathbf{C} : \arg z = \varphi_0\}$, $\varphi_0 = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ та $\{z \in \mathbf{C} : \arg z = \varphi_0\}, \varphi_0 = \pi(2k+1), k \in \mathbf{Z}$ функція Жуковського відображає в точки дійсної осі $[1,+\infty]$ та $[-\infty,-1]$ відповідно, що обходяться в одному та протилежному напрямку.

Геометричним образом комплексної площини при відображенні функцією Жуковського є дволисна поверхня, причому функція Жуковського здійснює неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини $\mathbf{C}$ на поверхню. Визначимо обернене до функції Жуковського відображення $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, що визначається двома гілками однозначності, які фіксують гілками однозначності кореня. Часто гілку однозначності відображення, оберненого до функції Жуковського, фіксують значенням у точці, а саме $z(\infty) = 0$ або $z(\infty) = \infty$, що відповідає відображенню комплексної площини на внутрішність або зовнішність одиничного кола. Також фіксують значенням у точці наступним чином $z(0) = i$ або $z(0) = -i$, що відповідає відображенню комплексної площини на верхню або нижню півплощину.

Описану вище поверхню називають поверхнею Рімана відображення, оберненого до функції Жуковського. Для відображення $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ точки $w = 1$ та $w = -1$ є алгебраїчними точками розгалуження.

2. Приклади розв'язування задач

1. Конформно відобразити область, що визначається як сектор з розрізом $\{z : |\arg z| < \pi/3, |z| < 1\} \setminus [1/2; 1]$ на область, що є верхня півплощина $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.1 а).

► Щоб відобразити дану область на верхню півплощину, скористаємося властивістю однолисності функції Жуковського, зауважимо, що одиничний круг із центром у точці $z = 0$ є областю однолисності функції Жуковського.

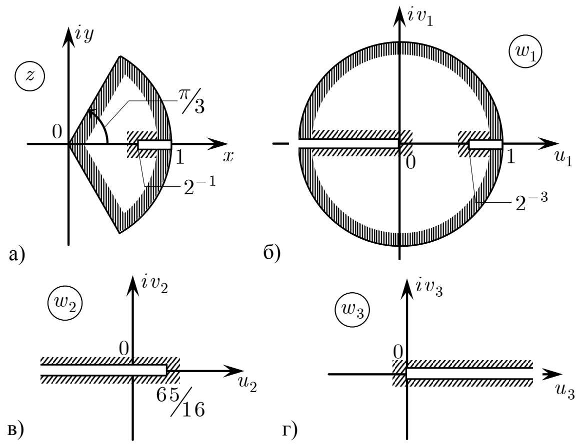

Рис. 8.1

Відобразимо дану область на одиничний круг, застосовуючи степеневу функцію. Збільшимо даний кут $2\pi/3$ до величини 2π, тобто в три рази. Застосуємо $w_1 = z^3$. При відображенні даний сектор перейде в одиничний круг з розрізами $\{w_1 : |w_1| < 1\} \setminus \{[-1;0] \cup [1/8;1]\}$ (рис. 8.1, б). До одержаної області застосуємо функцію Жуковського $w_2 = \dfrac{1}{2}\left(w_1 + \dfrac{1}{w_1}\right)$, при цьому область однолисності функції Жуковського з розрізами по дійсній осі перейде в розширену комплексну площину з розрізом по дійсній вісі відповідно $\overline{\mathbf{C}} \setminus [-\infty; 65/16]$ (рис. 8.1, в).

Застосуємо відображення паралельного переносу та повороту $w_3 = e^{i\pi}(w_2 - 65/16) = 65/16 - w_2$, при цьому отримана область перейде в комплексну площину з розрізом по додатній частині дійсної осі (рис. 8.1, г).

Застосуємо відображення, обернене до степеневої функції $w_4 = \sqrt{w_3}$, з вибором гілки однозначності $\sqrt{1} = 1$, що комплексну площину з розрізом відображає на верхню півплощину, яку треба було отримати.

Остаточно шукана функція будується як композиція зазначених відображень, а саме $w = w_4(w_3(w_2(w_1(z))))$. ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Що є образом указаних множин при відображенні функцією Жуковського:

а) $\{z : |z| = R\}, 0 < R < 1$ додатно орієнтоване;

б) $\{z : |z| = R\}, R > 1$ додатно орієнтоване;

в) $\{z : \arg z = a\}, 0 \le \alpha < 2\pi$ орієнтація від 0 до ∞, розглянути окремо випадки $\alpha \in \{0; \pi/2; \pi; 3\pi/2\}$.

2. Що є образом указаних областей при відображенні функцією Жуковського:

а) $\{z : |z| > 2\}$; $\{z : |z| < 1/2\}$;

б) $\{z : 0 < \arg z < \pi/4\}$; $\{z : \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\} \setminus [0; i]$.

3. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ вказані області:

а) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\} \setminus [-i; -i/2]$; б) $\{z : |z| > 1, 0 < \arg z < \pi/2\}$;

в) $\{z : |z| < 2\} \setminus \{[-2; -1] \cup [1; 2]\}$;

г) $\{z : |z| > 2\} \setminus \{[-3i; -2i] \cup [2i; +i\infty]\}$;

д) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z : |z| = 1,\ 0 < \arg z < \alpha\},\ \alpha \in (0; \pi)$.

4. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ область, що визначається зовнішністю еліпса у верхній півплощині, а саме:

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{ z = x + iy :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ \ y \ge 0 \right\}.$$

5. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ область, що визначається

$$\{z = x + iy : 3x^2 - 6y^2 > 2,\ \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \left[\sqrt{2/3}; 1\right].$$

6. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ область $\{z = x + iy : 2x^2 - 2y^2 < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0; ai], a > 0$.

7. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ область, що визначається зовнішністю "хреста", а саме: $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{[-ci; ci] \cup [-a; b]\}$, $\{a, b, c\} \in \mathbf{R}^{+}$.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Що є образом указаних множин при відображенні функцією Жуковського:
а) $\{z : |z| = R\}, 0 < R < \infty$ від'ємно зорієнтоване, розглянути окремо випадок $R = 1$;
б) $\{z : \arg z = a\}, 0 \le \alpha < 2\pi$ орієнтація від ∞ до 0, розглянути окремо випадки $\alpha \in \{0; \pi/2; \pi; 3\pi/2\}$.

2. Що є образом указаних областей при відображенні функцією Жуковського:
а) $\{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; б) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$;
в) $\{z : |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/4\}$.

3. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ указані області:
а) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0; i/2]$; б) $\{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [1; 2]$;
в) $\{z : |z| < 2, \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\} \setminus [i; 2i]$;
г) $\{z : |z| > 2, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [2i; +i\infty]$;
д) $\{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z : |z| = 1,\ 0 < \arg z < \alpha\}$, $\alpha \in (0; \pi/2)$.

4. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ область, що визначається внутрішністю еліпса у верхній півплощині, а саме:

$$\left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, y > 0 \right\}.$$

5. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ область, що визначається $\{z = x + iy : x^2 - y^2 < 1\}$.

6. * Що є образом областей при указаних відображеннях:
а) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ відображення $w = \dfrac{z}{z^2 + 1}$;
б) $\{z : |z| < 1, -\pi/n < \arg z < \pi/n\}$ відображення $w = \dfrac{z}{(1 + z^n)^{2/n}}$, де $w(z) > 0$ при $z > 0$.

Заняття 9. Тригонометричні і гіперболічні функції

1. Теоретичні питання

1. Означення тригонометричних і гіперболічних функцій. Властивості функцій. Області однолисності функції $f(z)=\cos z$. Конформність відображень.
2. Обернені до тригонометричних функції відображення. Поверхня Рімана. Гілки однозначності. Точки розгалуження відображень.

Означення. Тригонометричні функції $\cos z$, $\sin z$ комплексної змінної z визначають формулами:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ z\in\mathbf{C}. \tag{9.1}$$

За визначенням тригонометричних $\cos z$, $\sin z$ випливають такі властивості функції:

1) функції $\cos z$, $\sin z$ визначені та аналітичні в усіх точках комплексної площини, при цьому $(\cos z)'=-\sin z$, $(\sin z)'=\cos z$;

2) для дійсних значень $z=x\in\mathbf{R}$ функції $\cos z$, $\sin z$ збігаються з дійсними тригонометричними функціями дійсної змінної x;

3) тригонометричні формули, що справедливі для дійсних значень $x\in\mathbf{R}$, мають місце для комплексних $z\in\mathbf{C}$, зокрема:

$\cos^2 z+\sin^2 z=1,\ z\in\mathbf{C}$;

$\sin 2z=2\sin z\cos z,\ z\in\mathbf{C}$;

$\sin z=\cos\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right),\ z\in\mathbf{C}$;

4) функція $\cos z$ – парна, функція $\sin z$ – непарна;

5) функції $\cos z$, $\sin z$ – 2π–періодичні;

6) функція $\cos z$ конформна в усіх точках комплексної площини, крім точок $z=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, що похідна дорівнює 0; функція $\sin z$ конформна в усіх точках комплексної площини, окрім точок $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, де похідна дорівнює 0;

7) функції $\cos z$, $\sin z$ не є однолисними. При відображенні тригонометричними функціями $\cos z$, $\sin z$ комплексна площина $\mathbf{C}$ переходить у себе таким чином, що кожна точка $w\in\mathbf{C}$ має зліченну кількість різних прообразів. Тобто при відображенні тригонометричними функ-

ціями $\cos z$, $\sin z$ комплексна площина $\mathbf{C}$ "накриває" сама себе зліченну кількість разів.

Визначимо області однолисності функції $\cos z$. Зрозуміло, що функцію $\cos z$ легко подати як композицію лінійної функції $w_1 = iz$, показникової функції $w_2 = e^z$ та функції Жуковського $w_3 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Із властивостей вказаних відображень випливає, що функція $\cos z$ кожну смугу

$$D_k = \{z : k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi\},\ k \in \mathbf{Z} \tag{9.2}$$

взаємно однозначно (однолисно) відображає на комплексну площину $\mathbf{C}$ з розрізом уздовж частин дійсної осі $[-\infty,-1]$ та $[1,+\infty]$. Тобто області (9.2) є областями однолисності функції $\cos z$, а комплексну площину можна розбити на зліченну кількість областей однолисності.

Функція $\cos z$ здійснює неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини $\mathbf{C}$ на поверхню, що складається із зліченної кількості листів. Оберненим до функції $\cos z$ називають відображення $z = \operatorname{Arc}\cos w$ таким чином: при кожному фіксованому k довільному комплексному числу w, розташованому на відповідному листі поверхні, єдиним чином ставиться у відповідність певне комплексне число $z_k \in D_k$, $\cos z = w$. Тобто на комплексній площині визначають зліченну кількість різних однозначних функцій, що в сукупності називають багатозначним відображенням $z = \operatorname{Arc}\cos w = -i\operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)$. Відповідні однозначні функції, яких зліченна кількість, називають гілками однозначності багатозначного відображення $z = \operatorname{Arc}\cos w$. Описану вище поверхню називають поверхнею Рімана відображення $z = \operatorname{Arc}\cos w$.

Точки $w = 1$, $w = -1$ та $w = \infty$ є логарифмічними точками розгалуження багатозначного відображення $z = \operatorname{Arc}\cos w$.

Зауважимо, що області однолисності функції $\sin z$ легко визначаються, враховуючи тригонометричні формули приведення.

Означення. Тригонометричні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ комплексної змінної z визначають формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},\ z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$\mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1},\ z\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

За визначенням тригонометричних $\mathrm{tg}z$, $\mathrm{ctg}z$ випливають такі властивості функції:

1) функція $\mathrm{tg}z$ – визначена, аналітична та конформна в усіх точках комплексної площини, крім точок $z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; функція $\mathrm{ctg}z$ – визначена, аналітична та конформна в усіх точках комплексної площини, крім точок $z=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, при цьому $(\mathrm{tg}z)'=\frac{1}{\cos^2 z}$, $(\mathrm{ctg}z)'=-\frac{1}{\sin^2 z}$;

2) для дійсних значень $z=x\in\mathbf{R}$ функції $\mathrm{tg}z$, $\mathrm{ctg}z$ збігаються з дійсними тригонометричними функціями дійсної змінної x;

3) тригонометричні формули, що справедливі для дійсних значень $x\in\mathbf{R}$, мають місце для комплексних;

4) функції $\mathrm{tg}z$, $\mathrm{ctg}z$ – непарні;

5) функції $\mathrm{tg}z$, $\mathrm{ctg}z$ – π –періодичні;

6) функції $\mathrm{tg}z$, $\mathrm{ctg}z$ не є однолисними. Області однолисності визначаються аналогічно визначенню областей однолисності $\cos z$.

Означення. Гіперболічні функції $\mathrm{ch}z$, $\mathrm{sh}z$ комплексної змінної z визначають за формулами:

$$\mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ \mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\ z\in\mathbf{C}.$$

Гіперболічні функції $\mathrm{th}z$, $\mathrm{cth}z$ комплексної змінної z визначають за формулами:

$$\mathrm{th}z=\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1},\ z\neq\frac{\pi}{2}i+k\pi i,\ k\in\mathbf{Z},$$

$$\mathrm{cth}z=\frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z}=\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1},\ z\neq k\pi i,\ k\in\mathbf{Z}.$$

За формулами Ейлера випливають співвідношення, що пов'язують тригонометричні та гіперболічні функції:

$\mathrm{ch}z=\cos iz$; $\cos z=\mathrm{ch}iz$;

$\mathrm{sh}z=-i\sin iz$; $\sin z=-i\mathrm{sh}iz$.

Аналогічно попередньому досліджуються властивості гіперболічних функцій $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ для $z \in \mathbf{C}$, гіперболічних функцій $\operatorname{th} z$ для $z \neq \frac{\pi}{2} i + k\pi i, k \in \mathbf{Z}$ та $\operatorname{cth} z$ для $z \neq k\pi i,\ k \in \mathbf{Z}$.

2. Приклади розв'язування задач

1. Конформно відобразити область, що визначається як смуга з розрізом, $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1\} \setminus [-1; 0]$ на область, що є верхня півплощина $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 9.1, а).

► Щоб відобразити дану область на верхню півплощину, скористаємося властивістю однолисності функції $\sin z$. Зауважимо, ураховуючи формули приведення $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ та визначення областей однолисності функції $\cos z$, що областями однолисності функції $\sin z$ є смуги $D_k = \{z : -\pi/2 + k\pi < \operatorname{Re} z < \pi/2 + k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$. Відобразимо задану область на смугу з розрізом $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\} \setminus [-\pi/2; 0]$, що є областю однолисності $\sin z$, використовуючи, очевидно, дробово-лінійну функцію $w_1 = \frac{\pi}{2} z$ (рис. 9.1, б).

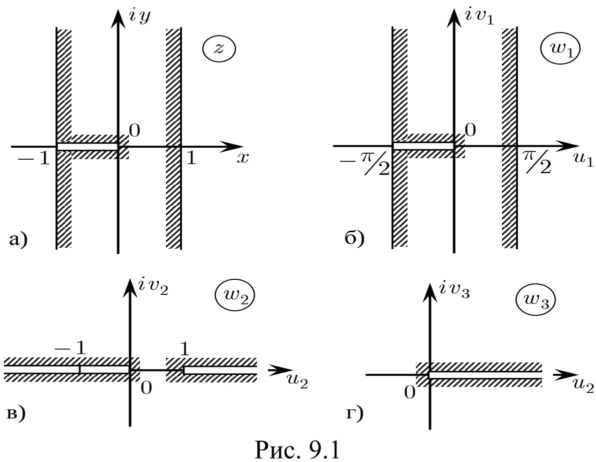

Рис. 9.1

До одержаної області застосуємо функцію $w_2 = \sin w_1$, при цьому отримана область перейде в комплексну площину з розрізом уздовж частин дійсної осі $[-\infty, 0]$ та $[1, +\infty]$, бо смуга $\{w_1 : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$ перейде в комплексну площину з розрізом уздовж частин дійсної осі

$[-\infty,-1]$ та $[1,+\infty]$, а розріз уздовж відрізка $[-\pi/2;0]$ перейде в точки відрізка $[-1;0]$ (рис. 9.1, в).

За допомогою дробово-лінійної функції перетворимо одержану область на комплексну площину з розрізом по додатній частині дійсної вісі (рис. 9.1, г). Для цього переведемо точку 0 в точку 0, а точку 1 в точку ∞ та скористаємося властивостями дробово-лінійної функції. Одержуємо функцію $w_3 = \dfrac{w_2}{w_2 - 1}$.

До одержаної області застосуємо відображення обернене до степеневої функції $w_4 = \sqrt{w_3}$ з вибором гілки однозначності $\sqrt{1} = 1$, яке комплексну площину відображає на верхню півплощину.

Остаточно шукана функція будується як композиція вказаних відображень, а саме $w = w_4(w_3(w_2(w_1(z))))$. ◄

3. Задачі для аудиторної роботи

1. Що є образом указаних областей при вказаних відображеннях:

а) $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ при $\operatorname{tg} z$;

б) $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/4\}$ при $\operatorname{ctg} z$;

в) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$ при $\operatorname{ch} z$;

г) $\{z : \operatorname{Re} z < 0,\ |\operatorname{Im} z| < \pi/4\}$ при $\operatorname{sh} z$.

2. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ указані області:

а) $\{z : |z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;

б) $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\} \setminus [-\pi i; 0]$;

в) $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\} \setminus \{[0;a] \cup [b;1]\}, 0 < a < b < 1$;

г) $\{z : |z-1| > 1, |z+1| > 1\} \setminus [2;+\infty]$;

д) $\{z : |z-i| > 1, |z+i| > 1, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [0;1]$.

3. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ указану область $\{z : |z-i| > 1, |z+i| > 1\} \setminus [-1;1]$.

4. * Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ указану область $\{z : |z-1| > 1\} \setminus \{[2;a] \cup [b;+\infty]\}, 2 < a < b < +\infty$.

4. Задачі для самостійної роботи

1. Що є образом указаних областей при вказаних відображеннях:

а) $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ при $\cos z$;

б) $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$, $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/4\}$ при $\sin z$;

в) $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$, $\{z : \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$ при $\operatorname{ch} z$;

г) $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, $\{z : \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$ при $\operatorname{sh} z$;

д) $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$ при $\operatorname{tg} z$;

е) $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ при $\operatorname{ctg} z$.

2. Конформно відобразити на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ указані області:

а) $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi\} \setminus [0;\pi]$; б) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\} \setminus [-i\infty; ia], a < 0$;

в) $\{z : |z-1| > 1, |z+1| > 1\} \setminus \{[-\infty;-4] \cup [2;+\infty]\}$;

г) $\{z : |z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0; ia], a > 0$;

д) $\{z : |z-i| > 1, |z+i| > 1, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{[0;1] \cup [2;+\infty]\}$.

Література

1. Александров И.А. Аналитические функции комплексного переменного / И.А.Александров., В.В.Соболев – М. : Высш. шк., 1984. – 186 с.
2. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И.Волковыский, Г.А.Лунц, И.Г.Араманович – М. : Наука, 1975. – 319 с.
3. Евграфов М.А. Аналитические функции – М. : Наука, 1968. – 472 с.
4. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. – М. : Наука, 1972. – 415 с.
5. Гришенко О.Ю.Теорія функцій комплексної змінної: Розв‘язування задач / О.Ю.Гришенко, М.І.Нагнібіда, П.П.Настасієв – К. : Вища шк., 1994. – 375 с.
6. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат – М.: Физматгиз, 1973. – 736 с.
7. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: В 2 т. – М. : Наука, 1967-1968. – Т. 1 – 486 с.; Т. 2 – 624 с.
8. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций – М. : Физматгиз, 1961. – 335 с.
9. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И.Маркушевич, Л.А.Маркушевич – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.
10. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Комплексний аналіз". Диференціювання функцій комплексної змінної. Конформні відображення / В.Г.Самойленко, А.М.Кириченко, А.В.Ловейкін, І.Б.Романенко, Г.В.Верьовкіна. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002. –84с.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного – М. : Наука, 1967. – 444 с.
12. Ряди та інтеграли в комплексній площині. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету / В.Г.Самойленко, А.В.Ловейкін, Г.В.Верьовкіна. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2005. –76с.
13. Самойленко В.Г. Комплексний аналіз. Приклади і задачі / В.Г.Самойленко, В.А.Бородін, Г.В.Верьовкіна, А.В.Ловейкін, І.Б.Романенко – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. –224с.
14. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов – М. : Наука, 1974. – 319 с.
15. Сидоров Б.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Б.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин– М. : Наука, 1976. – 408 с.
16. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ: В 2 ч. – М. : Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.
17. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей – М .: Изд-во иностр. лит., 1960. – 343 с.
18. Мельник Т.А. Курс лекцій з комплексного аналізу - http:/www.matfis.univ.kiev.ua/files/materials/konspect.pdf

Зміст

Навчальне видання

Методичні розробки до практичних занять
з дисципліни "Теорія функцій комплексної змінної"

Конформні відображення функцій комплексної змінної

для студентів механіко-математичного факультету,
які навчаються за напрямом підготовки "Механіка"

Упорядники: Верьовкіна Ганна Володимирівна
Ловейкін Андрій Вячеславович