КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Є. С. Вакал
Ю. Є. Вакал

КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМИ MATLAB

Навчальний посібник

КИЇВ – 2017

УДК 517.95(075.8)+004.43(075.8)
ББК 22 1я7
В 12

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. С. І. Ляшко
канд. фіз.-мат. наук, доц. О. С. Тригуб

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету **(*протокол № 11 від 16 червня 2016 року*)**

Вакал Є.С., Вакал Ю.Є.

В 12 **Класифікація рівнянь із частинними похідними з використанням системи MATLAB / Є. С. Вакал, Ю. Є. Вакал. – К.: Основа, 2017. – 104 с.**

ISBN 978-966-699-898-2

Розглянуто основні відомості з математичної фізики та засоби пакета MATLAB для розв'язання задач класифікації та зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь 2-го порядку з двома незалежними змінними. Наведено приклади задач, тексти програм, а також відповіді, отримані з використанням середовища MATLAB.

Для студентів, аспірантів і викладачів університетів, а також фахівців з математичної фізики й обчислювальної математики, що використовують системи комп'ютерної математики.

УДК 517.95(075.8)+004.43(075.8)
ББК 22 1я7

ISBN 978-966-699-898-2

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник написано на основі практичних занять з курсів "Рівняння математичної фізики" та "Прикладні програми", що проводилися авторами на механіко-математичному факультеті та факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Видання містить теоретичний матеріал, підібрані авторами приклади та задачі, що стосуються такого важливого розділу дисципліни "Рівняння математичної фізики" як класифікація та зведення до канонічного вигляду рівнянь із частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними [2, 4, 6, 10, 13, 14].

Класифікація має велике значення для теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП), оскільки приналежність рівнянь до того чи іншого типу говорить про властивості розв'язків цих рівнянь й особливості постановки для них крайових задач.

У посібнику викладено елементи класифікації рівнянь, показано, що всі лінійні рівняння 2-го порядку можна звести до трьох основних типів: гіперболічного, параболічного, еліптичного. Вводиться поняття характеристик, вивчається їх роль з точки зору зведення рівнянь до канонічного вигляду.

Відзначимо особливість даного посібника. В наш час не можна бути гарним фахівцем з прикладної математики без знання комп'ютерної техніки. Сучасні обчислювальні системи та інформаційні технології, що ґрунтуються на них, повністю змінили розумову діяльність людини. Неможливо уявити кваліфікованого вченого, інженера, конструктора, що не використовує програм для автоматизації виконання і високоякісного оформлення проектів. До таких програм і належить система комп'ютерної математики MATLAB. Вона вдало поєднує потужний апарат для математичних обчислень і розвинуті засоби програмування, що дає змогу говорити про неї як про універсальний інструмент для розв'язання складних науково-технічних обчислювальних задач.

Система MATLAB широко використовується для викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах світу.

Для студентів MATLAB залишається безцінним помічником у вивченні різноманітних методів, вивільняючи їх від рутинних математичних обчислень і зосереджуючи увагу на суті досліджуваного методу.

У посібнику наведено приклади розв'язування типових задач математичної фізики з використанням потужних засобів пакету MATLAB, тексти програм, за допомогою яких можна розв'язати запропоновані приклади для самостійної роботи, а також відповіді до задач, отримані з використанням середовища MATLAB.

Дане видання буде корисним для студентів, аспірантів та викладачів математичних дисциплін природничих факультетів університетів.

КЛАСИФІКАЦІЯ ДРЧП 2-ГО ПОРЯДКУ З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

Розглянемо лінійне рівняння з частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} +$$
$$+ b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), (x,y) \in \Omega. \qquad (1)$$

Припустимо, що коефіцієнти рівняння $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in C^2(\Omega)$ і ніде в області Ω одночасно не дорівнюють нулю ($|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| \neq 0$). Для визначеності можна вважати, що у вказаній області $a_{11} \neq 0$. Справді, у протилежному випадку може виявитися, що $a_{22} \neq 0$ в цій області. Але тоді, перепозначивши змінні x та y і коефіцієнти рівняння, дістанемо рівняння, в якому $a_{11} \neq 0$. Якщо ж a_{11} і a_{22} в деякій точці одночасно стають рівними нулю, то $a_{12} \neq 0$ в околі цієї точки. У такому випадку заміна змінних $x' = x + y$, $y' = x - y$ знову приводить до рівняння, в якому $a_{11} \neq 0$.

Надалі також вважатимемо $a_{11} > 0$. Якщо це не так, то помноживши (1) на –1, отримаємо рівняння, в якому $a_{11} > 0$.

Перетворимо рівняння (1), запровадивши в Ω нові незалежні змінні за формулами

$$\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y), \qquad (2)$$

які встановлюють взаємно-однозначну відповідність між точками (ξ, η) і (x, y) відповідних областей, тобто з (2) x і y визначаються як однозначні функції незалежних змінних ξ та η: $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$. Стосовно функцій ξ і η вважатимемо, що вони в області Ω двічі неперервно диференційовні, причому якобіан перетворення

$$J = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0. \qquad (3)$$

Позначимо $u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ через $U(\xi,\eta)$. Запишемо похідні за старими змінними x, y через похідні за новими змінними ξ, η. Тоді за правилом диференціювання складної функції маємо

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x ,\ u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y ,$$
$$u_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}, \tag{4}$$
$$u_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy},$$
$$u_{yy} = U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_\xi\xi_{yy} + U_\eta\eta_{yy}.$$

Праві частини формул (4) є лінійними функціями відносно частинних похідних U_ξ, U_η, $U_{\xi\xi}$, $U_{\xi\eta}$, $U_{\eta\eta}$. Підставивши значення похідних у рівняння (1)

$$\left(a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2\right)U_{\xi\xi} + 2\big(a_{11}\xi_x\eta_x + a_{22}\xi_y\eta_y +$$
$$+ a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)\big)U_{\xi\eta} + \left(a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2\right)U_{\eta\eta} + \Phi = 0,$$

зведемо його до вигляду

$$\bar{a}_{11}(\xi,\eta)U_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}(\xi,\eta)U_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}(\xi,\eta)U_{\eta\eta} + \Phi(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta) = 0, \tag{5}$$

де позначено

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$
$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{22}\xi_y\eta_y + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x), \tag{6}$$
$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

замість старих змінних x, y підставлено їхні вирази через нові змінні ξ і η, а через функцію Φ позначено усі доданки, які містять частинні похідні від функції U не вище 1-го порядку. Очевидно, функція Φ лінійна відносно U, U_ξ, U_η.

Рівняння (5) завжди можна звести до однієї з форм:

$$1)\ \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0, \bar{a}_{12} \neq 0;$$
$$2)\ \bar{a}_{11} = \bar{a}_{12} = 0, \bar{a}_{22} \neq 0; \tag{7}$$
$$3)\ \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \neq 0, \bar{a}_{12} = 0$$

відразу в усій області, де зберігається його тип.

Таке зведення пов'язане з розв'язанням нелінійного рівняння з частинними похідними 1-го порядку

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_y z_x + a_{22}z_y^2 = 0 \qquad (8)$$

при $\left|z_x\right|^2 + \left|z_y\right|^2 \neq 0$, яке називають рівнянням характеристичних змінних.

Зокрема, якщо вибрати заміну (2) так, щоб функції $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ були розв'язками рівняння (8), коефіцієнти $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, представлені формулами (6), стають рівними нулю.

Перепишемо рівняння (8) після множення на a_{11}>0 у вигляді

$$\left(a_{11}z_x + \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) z_y \right) \times$$

$$\times \left(a_{11}z_x + \left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) z_y \right) = 0 .$$

Це рівняння розпадається на сукупність рівнянь

$$a_{11}z_x + \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) z_y = 0, \qquad (9)$$

$$a_{11}z_x + \left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) z_y = 0. \qquad (10)$$

Отже, розв'язки кожного з рівнянь (9), (10) є розв'язками рівняння (8).

Для інтегрування рівнянь (9), (10) складаємо відповідну їм систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}, \quad \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}$$

або

$$a_{11}dy - \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) dx = 0, \qquad (11)$$

$$a_{11}dy - \left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) dx = 0. \qquad (12)$$

Рівняння (11), (12) можуть бути записані у вигляді одного рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{12}dx^2 = 0. \quad (13)$$

Коефіцієнти рівнянь (11), (12) або рівняння (13) мають неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно, що випливає з умов, накладених на коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22}. Оскільки $a_{11} > 0$, то існують загальні інтеграли цих рівнянь, і ліві частини цих інтегралів неперервні разом із частинними похідними до 2-го порядку.

Зв'язок між рівняннями (8), (13) встановлюють дві леми.

Лема 1. Якщо функція $z = \varphi(x, y)$, $\varphi_y(x, y) \neq 0$ є частинним розв'язком рівняння (8), то співвідношення $\varphi(x,y)=C$ є загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння (13).

Доведення. Нехай функція $z = \varphi(x, y)$ – розв'язок рівняння (8). Тоді, підставивши $\varphi(x,y)$ у (8) і поділивши на $\varphi_y(x, y) \neq 0$, ми отримаємо, що рівність

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (14)$$

є тотожністю, вона задовольняється для всіх x, y в області визначення розв'язку рівняння (8).

Розглянемо вираз $\varphi(x, y) = C$ і доведемо, що він є загальним інтегралом рівняння (13). Для цього слід показати, що функція y, яка визначається з неявного співвідношення $\varphi(x, y) = C$, задовольняє рівняння (13). Зафіксуємо довільне значення константи C. Нехай $y = f(x, C)$ є такою функцією. Обчислюючи похідну від функції, заданої неявно, отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x,C)}, \quad (15)$$

де дужки та індекс $y = f(x, C)$ у правій частині рівності (15) означають, що значення виразу береться на кривій $\varphi(x, y) = C$, тобто y не є незалежною змінною, а має значення, рівне $f(x, C)$. Обчислену похідну підставляємо в ліву частину рівняння (14)

$$\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}.$$

Вираз у квадратних дужках стає рівним нулю у будь-якій точці (x,y), а не тільки на кривій $\varphi(x,y)=C$, оскільки функція $\varphi(x,y)$ є розв'язком рівняння (14). Звідси випливає, що функція $y=f(x,C)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0 \qquad (16)$$

або рівняння (13).

Лема 2. Нехай співвідношення $\varphi(x,y)=C$ є загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння (13), причому $\varphi_y(x,y)\neq 0$ в області Ω і через кожну точку $(x_0,y_0)\in\Omega$ проходить інтегральна крива, визначена цим виразом. Тоді функція $z=\varphi(x,y)$ в області Ω задовольняє рівняння (8).

Доведення. Нехай вираз $\varphi(x,y)=C$ є загальним інтегралом рівняння (13). Покажемо, що функція $z=\varphi(x,y)$ задовольняє рівняння (8) у довільній точці (x_0,y_0). Виділимо інтегральну криву з набору $\varphi(x,y)=C$, яка проходить через цю точку, вважаючи $\varphi(x_0,y_0)=C_0$, тобто розглянемо інтегральну криву $y=f(x,C_0)$. Очевидно, що функція $y=f(x,C_0)$, задана неявно рівністю $\varphi(x,y)=C_0$, є розв'язком рівняння (13). Для всіх точок кривої $y=f(x,C_0)$ маємо

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=$$

$$\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C_0)}=0.$$

Остання рівність має місце в кожній точці кривої $\varphi(x, y) = C_0$. Зокрема, в точці (x_0, y_0) одержимо

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}\right) + a_{22} = 0$$

або

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

тобто функція $z=\varphi(x,y)$ задовольняє рівняння (8) у довільній точці (x_0, y_0).

Рівняння (13) називають *характеристичним рівнянням* лінійного ДРЧП (1), а його розв'язки – *характеристиками*.

Інтегральні криві рівняння (13) залежать від знаку його дискримінанту $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, і цей знак, виявляється, визначає тип рівняння з частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними (1). В залежності від знаку дискримінанту рівняння (13) вводиться така класифікація рівняння (1):

1) рівняння (1) в області Ω має гіперболічний тип (належить до гіперболічного типу), якщо $\delta > 0$ при $(x, y) \in \Omega$;

2) рівняння (1) в області Ω має еліптичний тип (належить до еліптичного типу), якщо $\delta < 0$ при $(x, y) \in \Omega$;

3) рівняння (1) в області Ω має параболічний тип (належить до параболічного типу), якщо $\delta = 0$ при $(x, y) \in \Omega$.

Неважко переконатися в справедливості рівності

$$\overline{\delta} = \overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)J^2 = \delta J^2, \tag{17}$$

з якої випливає інваріантність типу рівняння при перетворенні змінних (заміна змінних не змінює тип рівняння), оскільки з (3) якобіан перетворення змінних $J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$ відмінний від нуля.

Справді,

$$\overline{\delta} = \overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} = \left(a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y\right)^2 -$$

$$-\left(a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\right)\left(a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\right)=$$
$$=a_{11}^2\xi_x^2\eta_x^2+a_{22}^2\xi_y^2\eta_y^2+a_{12}^2\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)^2+2a_{11}a_{22}\xi_x\eta_x\xi_y\eta_y+$$
$$+2a_{11}a_{12}\xi_x^2\eta_x\eta_y+2a_{11}a_{12}\eta_x^2\xi_x\xi_y+2a_{22}a_{12}\xi_x\xi_y\eta_y^2+$$
$$+2a_{22}a_{12}\xi_y^2\eta_x\eta_y-a_{11}^2\xi_x^2\eta_x^2-2a_{11}a_{12}\xi_x^2\eta_x\eta_y-a_{11}a_{22}\xi_x^2\eta_y^2-$$
$$-2a_{12}a_{11}\eta_x^2\xi_x\xi_y-4a_{12}^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y-2a_{12}a_{22}\eta_y^2\xi_x\xi_y-a_{11}a_{22}\xi_y^2\eta_x^2-$$
$$-2a_{12}a_{22}\xi_y^2\eta_x\eta_y-a_{22}^2\xi_y^2\eta_y^2=a_{12}^2\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)^2+$$
$$+2a_{11}a_{22}\xi_x\eta_x\xi_y\eta_y-a_{11}a_{22}\xi_x^2\eta_y^2-4a_{12}^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y-a_{11}a_{22}\xi_y^2\eta_x^2=$$
$$=a_{12}^2\left(\xi_x^2\eta_y^2+\xi_y^2\eta_x^2-2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y\right)-$$
$$-a_{11}a_{22}\left(\xi_x^2\eta_y^2+\xi_y^2\eta_x^2-2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y\right)=$$
$$=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x^2\eta_y^2+\xi_y^2\eta_x^2-2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y\right)=$$
$$=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x\right)^2=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)J^2.$$

З означення типів рівнянь ясно, що в різних точках області рівняння зі змінними коефіцієнтами може мати різний тип.

Розглянемо область Ω, в усіх точках якої рівняння належить до одного типу (рівняння (1) в усій області Ω зберігає тип). З (13) випливає, що через кожну точку області проходять дві характеристики, причому для рівняння гіперболічного типу вони дійсні і різні, для рівняння еліптичного типу – комплексні і різні (комплексно-спряжені), для рівняння параболічного типу обидві характеристики дійсні і збігаються між собою.

Розглянемо окремо кожний випадок і покажемо, як вибирається заміна змінних, що зводить рівняння до канонічної форми в кожному з них.

ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ДРЧП 2-ГО ПОРЯДКУ З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

1) Нехай рівняння (1) в області Ω належить до гіперболічного типу, тобто $\delta > 0$. Очевидно, в цьому випадку рівняння характеристик (13) розпадається на сукупність двох рівнянь (11), (12), ліві частини яких дійсні і різні. Їхні загальні інтеграли

$$\varphi(x, y) = C_1, \ \psi(x, y) = C_2 \tag{18}$$

визначають два різних набори дійсних характеристик. Згідно з лемою 2 функції $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ при $\varphi_y \neq 0$, $\psi_y \neq 0$ є розв'язками рівнянь (9), (10), тобто

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \ \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Оскільки дискримінант $\delta = \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} > 0$, маємо нерівність

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y}.$$

Так як якобіан

$$J = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y = \psi_y \varphi_y \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} - \frac{\psi_x}{\psi_y} \right) \neq 0,$$

з останнього співвідношення випливає, що функції $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ є двома функціонально незалежними розв'язками рівнянь (9), (10).

Покладемо в перетворенні (2)

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \ \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y). \tag{19}$$

При такому виборі змінних з (6) випливає, що $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$. Коефіцієнт $\bar{a}_{12} \neq 0$ всюди в області Ω, оскільки з (17) $\bar{a}_{12}^2 = \delta J^2 \neq 0$. Тоді поділивши рівняння (5) на $2\bar{a}_{12}$, приводимо його до вигляду

$$U_{\xi\eta}=\Phi_1\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right), \tag{20}$$

де $\Phi_1=-\dfrac{\Phi}{2\bar{a}_{11}}$. Таким чином, у (7) має місце 1-й випадок.

Рівняння (20) є першою канонічною формою рівнянь гіперболічного типу.

При $a_{11}=a_{22}=0$ рівняння (1) вже має вигляд (20).

Введемо нові незалежні змінні за формулами

$$\alpha=\xi+\eta,\ \beta=\xi-\eta. \tag{21}$$

Заміна (21) є невиродженою, оскільки якобіан перетворення $\begin{vmatrix}\alpha_\xi & \alpha_\eta\\ \beta_\xi & \beta_\eta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$.

У нових змінних рівняння (1) набуває вигляду

$$U_{\alpha\alpha}-U_{\beta\beta}=\Phi_2\left(\alpha,\beta,U,U_\alpha,U_\beta\right), \tag{22}$$

який називають другою канонічною формою рівнянь гіперболічного типу.

2) Нехай рівняння (1) в області Ω належить до параболічного типу, тобто $\delta=0$.

У цьому випадку рівняння (11), (12) збігаються і набувають вигляду

$$a_{11}dy-a_{12}dx=0, \tag{23}$$

отже характеристичне рівняння (16) має один загальний інтеграл, який ми позначимо через $\varphi(x,y)=C.$ Тоді за лемою 2 функція $z=\varphi(x,y)$ буде розв'язком рівняння (8) або рівнянь (9), (10), які збігаються і мають вигляд $a_{11}z_x+a_{12}z_y=0$.

Виберемо заміну змінних (2) у вигляді

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\eta(x,y), \tag{24}$$

де $\eta=\eta(x,y)\in C^2(\Omega)$ – довільна функція від x, y, але така, що якобіан $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$.

Очевидно, в рівнянні (5) $\bar{a}_{11} = 0$, що випливає з (6) і (8). Оскільки дискримінант $\delta = 0$, то $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, а з припущення $a_{11} > 0$ має виконуватись нерівність $a_{22} \geq 0$. Тоді $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. З рівняння (8) дістанемо

$$a_{11}\xi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\xi_y\xi_x + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0\,. \quad (25)$$

Отже, $\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y = 0$. З урахуванням рівності (25) і співвідношення (6) для $\bar{a}_{12}$, покажемо, що $\bar{a}_{12} = 0$. Справді

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.$$

Коефіцієнт $\bar{a}_{22}$ у рівнянні (5) перетворюється до вигляду

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\eta_y^2 =$$
$$= \frac{a_{11}^2\eta_x^2 + 2a_{11}a_{12}\eta_x\eta_y + a_{12}^2\eta_y^2}{a_{11}} = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y\right)^2.$$

Отже, $\bar{a}_{22} \neq 0$, інакше існував би ненульовий розв'язок системи

$$a_{11}\xi_x + a_{12}\xi_y = 0\,,$$
$$a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y = 0\,,$$

що неможливо, оскільки заміна вибрана невиродженою і якобіан $J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$.

Таким чином, поділивши рівняння (5) на $\bar{a}_{22} \neq 0$, зведемо його до вигляду

$$U_{\eta\eta} = \Phi_3\left(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta\right), \quad (26)$$

де $\Phi_3 = -\dfrac{\Phi}{\bar{a}_{22}}$. Отже, у (7) має місце 2-й випадок.

Рівняння (26) є канонічною формою рівнянь параболічного типу.

3) Нехай рівняння (1) в області Ω належить до еліптичного типу, тобто $\delta<0$. Тоді, очевидно, внаслідок умови $\left|z_x\right|^2+\left|z_y\right|^2\neq 0$, рівняння (8) або сукупність рівнянь (9), (10) не можна задовольнити за допомогою будь-якої дійсної функції $z(x,y)$. Тому цю функцію природно шукати у вигляді комплексної функції $z(x,y)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$.

Оскільки дискримінант $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$, перепишемо рівняння (9), (10) у вигляді

$$a_{11}z_x+\left(a_{12}+i\sqrt{-\delta}\right)z_y=0, \tag{27}$$

$$a_{11}z_x+\left(a_{12}-i\sqrt{-\delta}\right)z_y=0. \tag{28}$$

Розглянемо для визначеності рівняння (27), в якому покладемо $z=\varphi+i\psi$. Маємо

$$a_{11}\left(\varphi_x+i\psi_x\right)+\left(a_{12}+i\sqrt{-\delta}\right)\left(\varphi_y+i\psi_y\right)=0.$$

Виділяючи дійсну й уявну частину, отримуємо

$$a_{11}\varphi_x+a_{12}\varphi_y-\sqrt{-\delta}\psi_y=0,$$

$$a_{11}\psi_x+a_{12}\psi_y+\sqrt{-\delta}\varphi_y=0$$

або

$$\begin{aligned}\varphi_x&=-\frac{a_{12}}{a_{11}}\varphi_y+\frac{\sqrt{-\delta}}{a_{11}}\psi_y,\\ \psi_x&=-\frac{a_{12}}{a_{11}}\psi_y-\frac{\sqrt{-\delta}}{a_{11}}\varphi_y.\end{aligned} \tag{29}$$

Для якобіана функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ внаслідок (29) буде мати місце рівність

$$J=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{-\delta}}{a_{11}}\left(\varphi_y^2+\psi_y^2\right)=\frac{\sqrt{-\delta}}{a_{11}}\left|z_y\right|^2. \tag{30}$$

З (30) випливає, що визначник системи може бути рівним 0 тільки в тих точках, в яких $\varphi_y = 0$, $\psi_y = 0$ (тобто $\left|z_y\right|^2 = 0$), отже внаслідок рівнянь (29) в точках, де $\varphi_x = 0$, $\psi_x = 0$ (тобто $\left|z_x\right|^2 = 0$). Але розв'язок $z = z(x, y)$ вибрано саме так, щоб ці рівності не виконувались одночасно. Отже, $J \neq 0$.

Існування розв'язку системи рівнянь (29) за умови, що визначник (30) відмінний від нуля, доводиться в припущенні, що коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} є аналітичними функціями від x і y. Тоді коефіцієнти рівнянь (27), (28) – також аналітичні функції від x і y, і за теоремою Ковалевської [7, 11, 16] можна стверджувати, що ці рівняння, а отже і рівняння (8), мають аналітичний розв'язок $z = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ в околі деякої точки (x_0, y_0) і $\left|z_x\right|^2 + \left|z_y\right|^2 \neq 0$ в цьому околі. А значить, існує і розв'язок $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ системи рівнянь (29).

Розглянувши рівність (28), аналогічними міркуваннями можна показати, що функція $z = \varphi(x, y) - i\psi(x, y)$ також є розв'язком рівняння (8).

Отже, загальні інтеграли рівняння характеристик (13), що розпадається на сукупність двох звичайних диференціальних рівнянь

$$a_{11}dy - \left(a_{12} + i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right)dx = 0, \qquad (31)$$

$$a_{11}dy - \left(a_{12} - i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right)dx = 0$$

з комплексно-спряженими лівими частинами, запишуться у вигляді

$$z_{1,2} = \varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C_{1,2}. \qquad (32)$$

Отже, маємо два набори комплексно-спряжених характеристик, причому функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ є незалежними.

Визначимо невироджену заміну змінних за формулами

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y). \qquad (33)$$

Оскільки функція $z=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ є розв'язком рівняння (8), то підставляючи її в це рівняння, отримаємо

$$a_{11}(\xi_x+i\eta_x)^2+2a_{12}(\xi_x+i\eta_x)(\xi_y+i\eta_y)+a_{22}(\xi_y+i\eta_y)^2=0.$$

Виділимо дійсну й уявну частину

$$a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_y\xi_x+a_{22}\xi_y^2-\left(a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\right)+$$
$$+2i\left(a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y\right)=0.$$

З рівностей комплексних чисел в останньому співвідношенні отримуємо рівність їхніх дійсних й уявних частин. Отже

$$a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_y\xi_x+a_{22}\xi_y^2=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2$$
$$a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=0.$$

Враховуючи формули для обчислення коефіцієнтів (6), приходимо до рівностей $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{12}=0$, причому при невиродженій заміні змінних (33) з (17) маємо $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}\neq 0$. Тоді з (5) отримуємо канонічну форму рівняння еліптичного типу

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}=\Phi_4(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta), \tag{34}$$

де $\Phi_4=-\dfrac{\Phi}{\bar{a}_{11}}$. Таким чином, у (7) має місце 3-й випадок.

Зауваження. Як зазначалось раніше, рівняння (1) в різних частинах області може належати до різних типів. Так рівняння Трікомі

$$yu_{xx}+u_{yy}=0$$

а) при $y>0$ належить до еліптичного типу ($\delta=-y<0$);
б) при $y=0$ належить до параболічного типу ($\delta=0$);
в) при $y<0$ належить до гіперболічного типу ($\delta=-y>0$).

Приклади. Визначити тип рівняння та звести його до канонічного вигляду в областях збереження типу

1. $u_{xx}-u_{xy}-6u_{yy}+u_x+2u_y=0$.

Запишемо коефіцієнти рівняння відповідно до позначень, прийнятих у (1):

$$a_{11}=1,\ a_{12}=-\frac{1}{2},\ a_{22}=-6.$$

Визначимо тип рівняння, обчисливши дискримінант $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=\frac{25}{4}>0$. Отже, в кожній точці площини задане рівняння має гіперболічний тип. Для визначення заміни змінних, що зведе рівняння до канонічної форми, запишемо характеристичне рівняння (13)

$$dy^2+dydx-6dx^2=0$$

або у вигляді

$$(dy-2dx)(dy+3dx)=0.$$

Характеристичне рівняння розпадається на сукупність рівнянь

$$dy-2dx=0,\ dy+3dx=0,$$

інтегруючи які знаходимо два набори характеристик рівняння

$$y-2x=C_1,\ y+3x=C_2.$$

Для зведення заданого рівняння до канонічного вигляду вибираємо заміну незалежних змінних у вигляді

$$\xi=y-2x, \eta=y+3x.$$

Запишемо похідні за старими змінними x, y через похідні за новими змінними ξ, η.

Позначимо $u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ через $U(\xi,\eta)$. Тоді

$$u_x=-2U_\xi+3U_\eta,\ u_y=U_\xi+U_\eta,\ u_{xx}=4U_{\xi\xi}-12U_{\xi\eta}+9U_{\eta\eta},$$
$$u_{xy}=-2U_{\xi\xi}+U_{\eta\xi}+3U_{\eta\eta},\ u_{yy}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння

$$4U_{\xi\xi}-12U_{\xi\eta}+9U_{\eta\eta}-\left(-2U_{\xi\xi}+U_{\eta\xi}+3U_{\eta\eta}\right)-$$
$$-6\left(U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}\right)+\left(-2U_\xi+3U_\eta\right)+\ 2\left(U_\xi+U_\eta\right)=0,$$

отримаємо першу канонічну форму рівняння

$$U_{\xi\eta}-\frac{1}{5}U_\eta=0.$$

2. $4y^2u_{xx}+12yu_{xy}+9u_{yy}+3u_x=0$.

Запишемо коефіцієнти рівняння відповідно до позначень, прийнятих у (1):

$$a_{11}=4y^2,\ a_{12}=6y,\ a_{22}=9.$$

Визначимо тип рівняння, обчисливши дискримінант $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=36y^2-36y^2=0$. Отже, в кожній точці площини задане рівняння має параболічний тип. Для визначення заміни змінних, що зведе рівняння до канонічної форми, запишемо характеристичне рівняння (13)

$$4y^2dy^2-12ydydx+9dx^2=0$$

або у вигляді

$$(2ydy-3dx)^2=0\ \Leftrightarrow\ (2ydy-3dx)=0.$$

З останньої рівності випливає, що характеристичне рівняння має лише один загальний інтеграл

$$y^2-3x=C.$$

Виберемо заміну змінних у вигляді

$$\xi=y^2-3x,\eta=\psi(x,y),$$

де функція $\psi(x,y)$ вибирається довільною так, щоб заміна незалежних змінних була невиродженою. Виберемо її у вигляді $\psi(x,y)=y$. При такому виборі якобіан перетворення

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}-3 & 2y\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0.$$

Запишемо похідні за старими змінними x, y через похідні за новими змінними ξ,η.

Позначимо $u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ через $U(\xi,\eta)$. Тоді

$$u_x=-3U_\xi,\ \ u_y=2yU_\xi+U_\eta,\ u_{xx}=9U_{\xi\xi},\ u_{xy}=-6yU_{\xi\xi}-3U_{\eta\xi},$$

$$u_{yy}=4y^2U_{\xi\xi}+4yU_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}+2U_\xi.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння

$$36y^2U_{\xi\xi}+12y\left(-6yU_{\xi\xi}-3U_{\eta\xi}\right)+$$

$$+9\left(4y^2U_{\xi\xi}+4yU_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}+2U_{\xi}\right)-9U_{\xi}=0,$$

отримаємо канонічну форму рівняння

$$U_{\eta\eta}+U_{\xi}=0.$$

3. $xu_{xx}+u_{yy}=0$.

Запишемо коефіцієнти рівняння відповідно до позначень, прийнятих у (1):

$$a_{11}=x,\ a_{12}=0,\ a_{22}=1.$$

Визначимо тип рівняння, обчисливши дискримінант $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-x$. В залежності від знаку x отримаємо, що:

а) при $x<0$ дискримінант $\delta>0$ – рівняння має гіперболічний тип;

б) при $x>0$ дискримінант $\delta<0$ – рівняння має еліптичний тип;

в) при $x=0$ дискримінант $\delta=0$ – рівняння має параболічний тип.

а) Розглянемо рівняння в області $x<0$. Для визначення заміни змінних, що зведе рівняння до канонічної форми, запишемо характеристичне рівняння (13)

$$xdy^2+dx^2=0$$

або у вигляді

$$\left(dy+\frac{dx}{\sqrt{-x}}\right)\left(dy-\frac{dx}{\sqrt{-x}}\right)=0.$$

Характеристичне рівняння розпадається на сукупність рівнянь

$$dy+\frac{dx}{\sqrt{-x}}=0,\ dy-\frac{dx}{\sqrt{-x}}=0,$$

інтегруючи які знаходимо два набори характеристик рівняння

$$y-2\sqrt{-x}=C_1,\ \ y+2\sqrt{-x}=C_2\,.$$

Для зведення заданого рівняння до канонічного вигляду вибираємо заміну незалежних змінних у вигляді

$$\xi=y-2\sqrt{-x}\,,\ \eta=y+2\sqrt{-x}\,. \tag{35}$$

Запишемо похідні за старими змінними *x*, *y* через похідні за новими змінними ξ,η.

Позначимо $u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ через $U(\xi,\eta)$. Тоді

$$u_x=\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(U_\xi-U_\eta\right),\ \ u_y=U_\xi+U_\eta\,,\ u_{yy}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}\,,$$

$$u_{xx}=\frac{1}{2\sqrt{(-x)^3}}\left(U_\xi-U_\eta\right)-\frac{1}{x}\left(U_{\xi\xi}-2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}\right).$$

Підставимо знайдені похідні в рівняння

$$x\left(\frac{1}{2\sqrt{(-x)^3}}\left(U_\xi-U_\eta\right)-\frac{1}{x}\left(U_{\xi\xi}-2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}\right)\right)+$$

$$+U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}=0\,,$$

в результаті чого воно перепишеться у вигляді

$$4U_{\xi\eta}+\frac{1}{2\sqrt{-x}}\left(U_\eta-U_\xi\right)=0 \Leftrightarrow U_{\xi\eta}+\frac{1}{8\sqrt{-x}}\left(U_\eta-U_\xi\right)=0\,. \tag{36}$$

Визначимо старі змінні через нові, зокрема з (35) знаходимо $4\sqrt{-x}=\eta-\xi$. Підставляючи цей вираз у (36), отримаємо першу канонічну форму рівняння

$$U_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(U_\xi-U_\eta\right)=0\,.$$

б) Розглянемо рівняння в області $x>0$. Для визначення заміни змінних, що зведе рівняння до канонічної форми, запишемо характеристичне рівняння (13)

$$xdy^2+dx^2=0 \Leftrightarrow dy^2-\left(\frac{idx}{\sqrt{x}}\right)^2=0$$

або у вигляді

$$\left(dy+i\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)\left(dy-i\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)=0.$$

Характеристичне рівняння розпадається на сукупність рівнянь

$$dy+i\frac{dx}{\sqrt{x}}=0,\ dy-i\frac{dx}{\sqrt{x}}=0,$$

інтегруючи які знаходимо два набори комплексно-спряжених характеристик

$$y+2i\sqrt{x}=C_1,\ y-2i\sqrt{x}=C_2. \qquad (37)$$

Виберемо нові незалежні змінні як дійсну й уявну частину загальних інтегралів (37)

$$\xi=y, \eta=2\sqrt{x}. \qquad (38)$$

Запишемо похідні за старими змінними *x*, *y* через похідні за новими змінними ξ, η.

Позначимо $u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ через $U(\xi,\eta)$. Тоді

$$u_x=\frac{1}{\sqrt{x}}U_\eta,\ u_{xx}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}U_\eta+\frac{1}{x}U_{\eta\eta},\ \ u_y=U_\xi,\ \ u_{yy}=U_{\xi\xi}.$$

Підставимо знайдені похідні в рівняння

$$x\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}U_\eta+\frac{1}{x}U_{\eta\eta}\right)+U_{\xi\xi}=0 \Leftrightarrow U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}-\frac{1}{2\sqrt{x}}U_\eta=0. \qquad (39)$$

Визначимо старі змінні через нові, зокрема з (38) знаходимо $2\sqrt{x}=\eta$. Підставляючи цей вираз у (39), отримаємо канонічну форму рівняння

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}U_\eta=0.$$

в) Розглянемо рівняння при $x=0$. Якщо підставити значення $x=0$ в задане рівняння, то воно запишеться в канонічному вигляді

$$u_{yy}=0.$$

Отже на координатній осі $x = 0$ рівняння належить до параболічного типу.

4. $5u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 4u_y = 0$.

Скористаємося для розв'язання задачі системою комп'ютерної математики MATLAB в інтерактивному режимі [1, 5, 8, 9]. Опишемо змінні, які будуть використані в розрахунках, як символьні:

```
>> syms x y D2u_x D2u_y D2u_xy Du_y Du_x u
>> syms Du_l Du_g D2u_l D2u_g D2u_lg
```

Тут `D2u_x, D2u_y, D2u_xy, Du_y, Du_x` – позначення похідних функції u за старими змінними x і y, `D2u_l, D2u_g, D2u_lg, Du_l, Du_g` – позначення похідних функції u за новими змінними l і g [3].

Вводимо досліджуване диференціальне рівняння:

```
>> func=5*D2u_x+4*D2u_xy+4*D2u_y+4*Du_y
func =
5*D2u_x+4*D2u_xy+4*D2u_y+4*Du_y
```

Отримуємо вільний член `f` і коефіцієнти рівняння `a11, a12, a22`:

```
>> f=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{0,0,0,0,0,0})
f =
0
>>a11=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{1,0,0,0,0,0})-f
a11 =
 5
>>a22=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{0,0,1,0,0,0})-f
a22 =
4
```

```
>>a12=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{0,1/2,0,0,0,0})-f
a12 =
2
```

Знаходимо дискримінант характеристичного рівняння

```
>> D= a12^2-a11*a22
D =
-16
```

Так як дискримінант $\delta < 0$, рівняння належить еліптичному типу. Знаходимо один з розв'язків характеристичного рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + i\sqrt{-\delta}}{a_{11}}:$$

```
>> dydx=simple((a12+sqrt(-1)*...
(sym(-D))^(1/2))/a11)
dydx =
2/5+4/5*i
```

Знаходимо загальний інтеграл рівняння характеристик:

```
>> tet3=subs(dydx,{'x','y'},{x,y})
tet3 =
0.4000 + 0.8000i
>> tet3=sym(tet3)
tet3 =
(2/5)+(4/5)*i
>>  third=strcat('Dy=',char(tet3))
third =
Dy=(2/5)+(4/5)*i
>> temp3=dsolve(char(third),'x')
temp3 =
(2/5+4/5*i)*x+C1
>>  r3=temp3-y
r3 =
(2/5+4/5*i)*x+C1-y
>> temp3=strcat(char(r3),'=0')
```

```
temp3 =
(2/5+4/5*i)*x+C1-y=0
>> tt3=solve(temp3,'C1')
tt3 =
-2/5*x-4/5*i*x+y
>> tt3=subs(tt3,{'x','y'},{x,y})
tt3 =
-2/5*x-4/5*i*x+y
```

Робимо першу заміну, обнуляючи уявну частину:

```
>> l=subs(tt3,{'i','j','sqrt(-1)'},{0,0,0})
l =
-2/5*x+y
```

Робимо другу заміну, усуваючи дійсну частину:

```
>>g=subs((tt3-l),{'i','j','sqrt(-1)'},{1,1,1})
g =
-4/5*x
```

Таким чином, заміна змінних має вигляд: $l=-\frac{2x}{5}+y, g=-\frac{4x}{5}$. Перевіряємо, чи дана заміна невироджена. Знаходимо якобіан перетворення:

```
>>Ja=simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-...
diff(l,'y')*diff(g,'x'))
Ja =
4/5
```

Виражаємо похідні за новими змінними, використовуючи відомі формули:

```
>>Du_x=simple(Du_l*(diff(l,'x'))+...
Du_g*(diff(g,'x')))
Du_x =
-2/5*Du_l-4/5*Du_g
>>Du_y=simple(Du_l*(diff(l,'y'))+...
Du_g*(diff(g,'y')))
```

```
Du_y =
Du_l
>>D2u_x=simple(D2u_l*(diff(l,'x')^2)+ 2*...
D2u_lg*(diff(l,'x')*diff(g,'x'))+D2u_g*...
(diff(g,'x')^2)+Du_l*(diff(diff(l,'x'),'x'))...
+Du_g*(diff(diff(g,'x'),'x')))
D2u_x =
4/25*D2u_l+16/25*D2u_lg+16/25*D2u_g
>>D2u_y=simple(D2u_l*(diff(l,'y')^2)+2*...
D2u_lg*(diff(l,'y')*diff(g,'y'))+D2u_g*...
(diff(g,'y')^2)+Du_l*(diff(diff(l,'y'),'y'))+...
Du_g*(diff(diff(g,'y'),'y')))
D2u_y =
D2u_l
>>D2u_xy=simple(D2u_l*(diff(l,'x')*...
diff(l,'y'))+D2u_lg*(diff(l,'x')*...
diff(g,'y')+diff(l,'y')*diff(g,'x'))+...
D2u_g*(diff(g,'x')*diff(g,'y'))+Du_l*...
(diff(diff(l,'x'),'y'))+...
Du_g*(diff(diff(g,'x'),'y')))
D2u_xy =
-2/5*D2u_l-4/5*D2u_lg
```

Далі підставляємо знайдені похідні в початкове рівняння:

```
>>temp=subs(func,{'Du_x','Du_y','D2u_x',...
'D2u_y','D2u_xy'},{Du_x,Du_y,D2u_x,D2u_y,...
D2u_xy})
temp =
16/5*D2u_l+16/5*D2u_g+4*Du_l
```

Оскільки рівняння належить до еліптичного типу, виділяємо коефіцієнт при U_{ll} і ділимо на нього останній вираз:

```
>> c11=subs(temp,{'D2u_l','D2u_lg','D2u_g',...
'Du_l','Du_g','u'},{1,0,0,0,0,0})
c11 =
16/5
```

```
>> temp=temp/c11
temp =
D2u_l+D2u_g+5/4*Du_l
```

Приписуємо до останнього виразу '=0':

```
>> can=strcat(char(temp),'=0')
can =
D2u_l+D2u_g+5/4*Du_l=0
```

Виводимо результати розрахунків:

```
>>disp(sprintf...
('Перша заміна - ksi: l(x,y)= %s. ',char(l)))
Перша заміна - ksi: l(x,y)= -2/5*x+y.
>>disp(sprintf...
('Друга заміна - eta: g(x,y)= %s. ',char(g)))
Друга заміна - eta: g(x,y)= -4/5*x.
>>disp(sprintf...
('Канонічна форма рівняння:  %s.', char(can)))
Канонічна форма рівняння:
D2u_l+D2u_g+5/4*Du_l=0.
```

Таким чином, в нових змінних l, g рівняння набуває канонічного вигляду

$$U_{ll} + U_{gg} + \frac{5}{4} U_l = 0.$$

У додатку наведено програмний файл *canonical_form.m* на мові MATLAB, що автоматизує перетворення зі зведення лінійних рівнянь 2-го порядку з двома незалежними змінними до канонічного вигляду.

Для рівнянь параболічного та еліптичного типів разом з основним запропоновано додатковий підхід, що враховує можливість представлення коефіцієнтів рівнянь у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної. У цьому випадку розрахункові формули спрощуються.

Зокрема, якщо $a_{11}(x,y) = b_{11}(x)c_{11}(y)$, $a_{12}(x,y) = b_{12}(x)c_{12}(y)$, $a_{22}(x,y) = b_{22}(x)c_{22}(y)$ і для коефіцієнтів, що залежать від y, має місце співвідношення $c_{12}^2(y)=c_{11}(y)c_{22}(y)$ (досить поширена ситуація), характеристичні рівняння (31) приводяться до вигляду

$$\frac{c_{11}(y)}{c_{12}(y)}dy-\frac{b_{12}(x)\pm i\sqrt{b_{11}(x)b_{22}(x)-b_{12}^2(x)}}{b_{11}(x)}dx=0\,.$$

Інтегруючи окремо перший і другий доданки лівої частини рівняння, можна уникнути необхідності розв'язувати диференціальне рівняння, використовуючи функцію *dsolve*. При такому підході легко визначаються дійсна й уявна частини загального інтегралу.

Для рівнянь еліптичного типу також враховано випадок, коли коефіцієнт $a_{12}=0$. Тоді співвідношення (31) стають особливо простими

$$\frac{\sqrt{c_{11}(y)}}{\sqrt{c_{22}(y)}}dy\pm i\frac{\sqrt{b_{22}(x)}}{\sqrt{b_{11}(x)}}dx=0\,.$$

Для рівнянь гіперболічного типу окремо розглянуто випадки, коли коефіцієнти a_{11} або a_{22} дорівнюють нулю.

Вибір варіанту розрахунку здійснюється користувачем. У деяких випадках, коли системі MATLAB не вдається розв'язати диференціальне рівняння так, щоб можна було ввести прийнятну заміну змінних, передбачена можливість введення користувачем у спрощеному вигляді правої частини характеристичного рівняння, записаного відносно $\dfrac{dy}{dx}$.

При необхідності програма може бути модифікована під ті чи інші потреби користувача. Як самостійне завдання, можна запропонувати користувачу створити програму, яка дозволить врахувати запис коефіцієнтів у вигляді добутку функцій від однієї змінної і для рівнянь гіперболічного типу.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 1

Визначити тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП 2-го порядку з двома незалежними змінними

1	$yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$, $y \neq -x,\ x^2 + y^2 \neq 0$
2	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$, $xy \neq 0$
3	$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x = 0$, $xy \neq 0$
4	$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$
5	$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y + 4 = 0$
6	$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$
7	$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + 2xu_x = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$
8	$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x - u_y = 0$
9	$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 2u_y + u = 0$
10	$\left(1 + x^2\right)u_{xx} + \left(1 + y^2\right)u_{yy} + \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)u_x +$ $+\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)u_y = 0$
11	$\left(1 + x^2\right)u_{xx} - \left(1 + y^2\right)u_{yy} + xu_x - yu_y + yu + 2 = 0$
12	$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$
13	$u_{xx} - \left(1 + y^2\right)^2 u_{yy} - 2y\left(1 + y^2\right)u_y = 0$
14	$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - \left(3 + \sin^2 x\right)u_{yy} - yu_y = 0$
15	$y^2 u_{xx} - 2ye^x u_{xy} + e^{2x} u_{yy} = 0$
16	$u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)u_{yy} + \dfrac{1}{\cos x}u_y +$ $+\dfrac{\sin x}{\cos x}u_x - \cos^2 x = 0,\ \cos x \neq 0$

17	$u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-\sin x u_y=0$
18	$u_{xx}+2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}-\cos x u_y=0$
19	$xu_{xx}+(x+y)u_{xy}+yu_{yy}=0,\ x\neq y,\ x^2+y^2\neq 0$
20	$u_{xx}+2u_{xy}+\cos^2 x u_{yy}-\operatorname{ctg} x u_x+\sin^2 x u=0,\ \sin x\neq 0$
21	$4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0,\ y\neq 0$
22	$y^2u_{xx}+2yu_{xy}+2u_{yy}=0,\ y\neq 0$
23	$2yu_{xx}-(2y-1)u_{xy}-u_{yy}+2\frac{u_y-u_x}{1+2y}=0,\ y\neq -\frac{1}{2}$
24	$y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0,\ xy\neq 0$
25	$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0,\ xy\neq 0$
26	$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}=0,\ xy\neq 0$
27	$yu_{xx}+x(2y-1)u_{xy}-2x^2u_{yy}-\frac{y}{x}u_x+\frac{2x}{2y+1}u_x+$ $+\frac{4x^2}{2y+1}u_y=0,\ \ y\neq -\frac{1}{2},\ \ x\neq 0$
28	$yu_{xx}-(x+y)u_{xy}+xu_{yy}=0,\ x\neq y,\ x^2+y^2\neq 0$
29	$x^2y^2u_{xx}+u_{yy}=0,\ xy\neq 0$
30	$u_{xx}+x^2u_{yy}=0,\ x\neq 0$
31	$x^2u_{xx}+u_{yy}=0,\ x\neq 0$
32	$y^2u_{xx}+u_{yy}=0,\ y\neq 0$
33	$4xu_{xx}+2(y-x)u_{xy}-yu_{yy}+4u_x-2u_y=0,$ $x\neq -y,\ \ x^2+y^2\neq 0$

34	$3u_{xx}+2u_{xy}-u_{yy}+2u_x+3u_y=0$
35	$u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$
36	$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+3u_x-5u_y+4u=0$
37	$u_{xx}+4u_{xy}+3u_{yy}+5u_x+u_y+4u=0$
38	$y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+2x^2u_{yy}+yu_y=0,\ xy\neq 0$
39	$2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u_x+4u_y+u=0$
40	$u_{xx}-2xu_{xy}+x^2u_{yy}-2u_y=0$
41	$u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+u_y=0$
42	$u_{xx}-6u_{xy}+10u_{yy}+u_x-3u_y=0$
43	$4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-2u_y=0$
44	$u_{xx}-2\sin xu_{xy}+\left(2-\cos^2 x\right)u_{yy}=0$
45	$3u_{xx}-5u_{xy}-2u_{yy}+3u_x+u_y-2=0$
46	$u_{xx}+2(1+2x)u_{xy}+4x(1+x)u_{yy}+2u_y=0$
47	$u_{xx}-8u_{xy}-9u_{yy}+21u_x+3u_y=0$
48	$\sin^2 xu_{xx}-2y\sin xu_{xy}+y^2u_{yy}=0,\ y^2+\sin^2 x\neq 0$
49	$u_{xx}+4u_{xy}+3u_x+4u=0$
50	$\mathrm{tg}^2 xu_{xx}+u_{yy}+\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}u_x+u=0,\ \cos x\neq 0$
51	$\sin^2 yu_{xx}-2\sin yu_{xy}+u_{yy}-5u_y-u=0$
52	$xu_{xx}+2\sqrt{x}\sqrt{y}u_{xy}+yu_{yy}=0,\ x,y>0$
53	$\mathrm{tg}^2 xu_{xx}-2y\,\mathrm{tg}\,xu_{xy}+y^2u_{yy}+\mathrm{tg}^3 xu_x+2yu_y=0$, $y^2+\mathrm{tg}^2 x\neq 0$
54	$u_{xx}-2xu_{xy}+\left(x^2-1\right)u_{yy}+\dfrac{1}{1-x}u_x=0,\ x\neq 1$
55	$2u_{xx}-2e^y u_{xy}+e^{2y}u_{yy}+u_x+e^{2y}u_y=0$

56	$4u_{xx} - 4xu_{xy} + x^2u_{yy} + 4u = 0$
57	$u_{xx} + \operatorname{ch} x u_{xy} = 0$
58	$4y^2u_{xx} + 2\left(1 - y^2\right)u_{xy} - u_{yy} - \dfrac{2y}{1+y^2}\left(2u_x - u_y\right) -$ $-\left(1 + y^2\right)^2 u = 0$
59	$u_{xx} - 2\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}u_{xy} + \left(2 + \cos x\right)u_{yy} = 0$
60	$\sec x u_{xx} + 2u_{xy} + \cos x u_{yy} = 0$
61	$u_{xy} + u_{yy} - 5xu_y - yu_x = 0$
62	$\operatorname{tg}^2 y u_{xx} + 2\operatorname{tg} y u_{xy} + u_{yy} + \sec^2 y u_x = 0$
63	$4u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + 3u = 0$
64	$\sin^2 y u_{xx} + 2\sin y u_{xy} + u_{yy} + \cos y u_x = 0$
65	$\cos^2 x u_{xx} + 2\sin x\cos x u_{xy} + \sin^2 x u_{yy} -$ $-\cos^2 x\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}u_x = 0,\ \sin x \neq 0$
66	$u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} + u_x + u_y = 0$
67	$e^y u_{xx} + e^x u_{yy} - \dfrac{1}{2}e^y u_x - \dfrac{1}{2}e^x u_y = 0$
68	$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 6u_y + u = 0$
69	$u_{xx} + e^{2x}u_{yy} = 0$
70	$u_{xx} + 2\cos x u_{xy} + \cos^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$
71	$u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + u_y + 2u = 0$
72	$x^2u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$
73	$u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + e^x u_y = 0$
74	$u_{xx} + 2\sin x u_{xy} + \left(1 + \sin^2 x\right)u_{yy} = 0$

75	$5u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+3u_x=0$
76	$2e^x u_{xy}-u_{yy}+2e^x u_y=0$
77	$u_{xx}+2yu_{xy}+\left(1+y^2\right)u_{yy}-(1-y)u_y=0$
78	$u_{xy}+u_{yy}-4u_y-4u_x=0$
79	$e^{2y}u_{xx}-u_{yy}=0$
80	$u_{xx}+\left(1+x^2\right)^2 u_{yy}-2x\dfrac{1}{1+x^2}u_x=0$
81	$u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}+u_x+2u_y=0$
82	$u_{xx}+2xu_{xy}+\left(1+x^2\right)u_{yy}=0$
83	$u_{xx}-\cos x u_{xy}-\dfrac{1}{4}\sin^2 x u_{yy}=0$
84	$u_{xx}+4e^x u_{xy}+4e^{2x}u_{yy}+5u_x=0$
85	$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-5u_y=0$
86	$u_{xy}-e^x u_{yy}+3u_y=0$
87	$u_{xx}+2\operatorname{tg} x u_{xy}+\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)u_{yy}+\dfrac{1}{\cos^2 x}u_y=0$, $\cos x\neq 0$
88	$2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y=0$
89	$u_{xx}+4e^y u_{xy}+4e^{2y}u_{yy}=0$
90	$u_{xx}+2xyu_{xy}+10x^2y^2u_{yy}-\dfrac{1}{x}u_x+10x^2yu_y=0$, $xy\neq 0$
91	$\dfrac{y}{2}u_{xx}-2u_{xy}-16u_y=0$
92	$u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}-2u_y-\dfrac{2}{3}u_x=0$
93	$y^2u_{xx}-4xyu_{xy}+4x^2u_{yy}-\dfrac{y^2}{x}u_x=0$, $x\neq 0$
94	$u_{xx}+9u_{yy}+3u_y+u_x+9u=0$

95	$9u_{xx} - 6e^{y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + e^{2y}u_{y} = 0$
96	$u_{xx} + 4\cos x u_{xy} + \left(1 + 4\cos^2 x\right)u_{yy} - 2\sin x u_{y} = 0$
97	$2u_{xx} - 4u_{xy} - 6u_{yy} - u_{x} + 7u_{y} = 0$
98	$3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{x} - 3u_{y} = 0$
99	$u_{xx} - 2u_{xy} - 8u_{yy} + 3u_{y} = 0$
100	$e^{y}u_{xx} - u_{xy} + u_{y} - e^{y}u_{x} = 0$
101	$x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + 2xu_{x} - u_{y} = 0$
102	$\sin^2 x u_{xx} - 2y\sin x u_{xy} + \left(1 + y^2\right)u_{yy} = 0$, $\sin x \neq 0$
103	$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_{x} + 2u_{y} = 0$
104	$4e^{2y}u_{xy} + u_{yy} + 2u_{y} - 16e^{4y} = 0$
105	$\sin^2 x u_{xx} - 2y\sin x u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$, $y^2 + \sin^2 x \neq 0$
106	$u_{xx} + 6u_{xy} - 6u_{y} + u_{x} - 9u = 0$
107	$u_{xx} + 2e^{x}u_{xy} + e^{2x}u_{yy} = 0$
108	$5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 4u_{y} = 0$
109	$\operatorname{ctg}^2 x u_{xx} - 2\operatorname{ctg} x u_{xy} + u_{yy} - \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}u_{x} = 0$, $\sin x \neq 0$
110	$u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} - u_{x} - 2u_{y} = 0$
111	$\sin^2 y u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + e^{2x}\dfrac{\cos y}{\sin y}u_{y} = 0$, $\sin y \neq 0$
112	$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} + \left(9 + \cos^2 x\right)u_{yy} = 0$
113	$e^{2x}u_{xx} + 4e^{x+y}u_{xy} + 3e^{2y}u_{yy} + 3e^{2y}u_{y} + e^{2x}u_{x} = 0$
114	$e^{x}u_{xx} + u_{xy} = 0$
115	$u_{xx} - 2xu_{xy} + \left(x^2 - 1\right)u_{yy} + 3u_{y} = 0$

116	$\sin^2 y u_{xx} + 2x\sin y u_{xy} + x^2 u_{yy} + \left(x\cos y - \dfrac{\sin^2 y}{x} \right) u_x = 0,$ $x \neq 0$
117	$2u_{xx} - 2e^y u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$
118	$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - u_y + 3u = 0$
119	$u_{xx} - 8u_{xy} + 2u_x - u_y = 0$
120	$u_{xx} - 2\,\mathrm{ctg}\, x u_{xy} + \mathrm{ctg}^2 x u_{yy} = 0$
121	$u_{xx} + \mathrm{ch}\, x u_{xy} - \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} u_x = 0$
122	$x^2 u_{xx} - 2x\sin y u_{xy} + \sin^2 y u_{yy} + y u_y = 0$, $x^2 + \sin^2 y \neq 0$
123	$\mathrm{sh}\, y u_{xy} - x u_{yy} + \dfrac{x\,\mathrm{ch}\, y}{\mathrm{sh}\, y} u_y - x\,\mathrm{sh}^2 y u = 0$
124	$e^{2y} u_{xx} + e^y u_{xy} + 0.25 u_{yy} + u = 0$
125	$u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + 2u_y - u_x = 0$
126	$\left(1 + e^{2x}\right) u_{xx} + 2e^x u_{xy} + u_{yy} - \dfrac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}} u_y = 0$
127	$y u_{xx} - 2u_{xy} - 2u_x = 0$
128	$9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 7u_x - 2u_y = 0$
129	$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_y + 4u_x + 3u = 0$
130	$u_{xx} - 2e^y u_{xy} = 0$
131	$0.25 u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} + u_x - 2u = 0$
132	$u_{yy} - 2\,\mathrm{sh}\, y u_{xy} - \dfrac{\mathrm{ch}\, y}{\mathrm{sh}\, y} u_y = 0$
133	$2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - u_y = 0$
134	$3u_{xx} - 8u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x - u_y = 0$

135	$\left(1+\sin^2 y\right)u_{xx} - 2\sin y u_{xy} + u_{yy} = 0$
136	$\left(1+y^2\right)u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$
137	$u_{xx} + 2yu_{xy} + \left(1+y^2\right)u_{yy} = 0$
138	$\left(1+\cos^2 y\right)u_{xx} + 2\cos y u_{xy} + u_{yy} = 0$
139	$3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$, $xy \neq 0$
140	$u_{xx} - 2e^x u_{xy} + e^{2x}u_{yy} = 0$
141	$u_{xx} + x^2y^2u_{yy} = 0$, $xy \neq 0$
142	$u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$, $y \neq 0$
143	$x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$, $xy \neq 0$
144	$yu_{xx} - 2u_{xy} - 2u_x = 0$
145	$\left(1+y^2\right)u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$
146	$u_{xx} + 2yu_{xy} + \left(1+y^2\right)u_{yy} = 0$
147	$u_{xx} - 4u_{xy} + 13u_{yy} + 7u_x + 6u_y = 0$
148	$3u_{xx} + 8u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0$
149	$2u_{xx} + 8u_{xy} + 8u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$
150	$8u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} - u_x - 3u_y = 0$
151	$16u_{xx} - 8u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + 2u_y = 0$
152	$\left(x^2+y^2\right)u_{xx} + 4xyu_{xy} + \left(x^2+y^2\right)u_{yy} = 0$
153	$5y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$
154	$e^x u_{xx} + u_{yy} = 0$
155	$5x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$, $xy \neq 0$

156	$9y^4u_{xx}-6y^2\sin xu_{xy}+\sin^2 xu_{yy}-$ $-\dfrac{3y^3\cos x+2\sin^2 x}{y}u_y=0,\ \ y\neq 0$
157	$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+\left(4+y^2\right)u_{yy}=0\,,\ \ x\neq 0$
158	$u_{xx}+\operatorname{tg} xu_{xy}+10\operatorname{tg}^2 xu_{yy}-\dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg} x}u_x=0\,,\ \ tgx\neq 0$
159	$25u_{xx}-10u_{xy}+u_{yy}-5u_x+u_y=0$
160	$\cos^2 yu_{xx}-2\sin x\cos yu_{xy}+\sin^2 xu_{yy}+$ $+\dfrac{\sin^2 x\sin y-\cos x\cos^2 y}{\cos y}u_y=0,\ \ \cos y\neq 0$
161	$x^2u_{xx}+\left(2x^2-y^2\right)u_{xy}-2y^2u_{yy}+\dfrac{2xy(y-2x)}{y^2+2x^2}\left(u_x+2u_y\right)=0,$ $x^2+y^2\neq 0$
162	$u_{xx}+2\cos^2 yu_{xy}+\cos^4 yu_{yy}-2\cos^4 y\,\mathrm{tgy}\,u_y=0$
163	$\sin^2 yu_{xx}+\cos^2 xu_{yy}+\dfrac{\sin^2 y\sin x}{\cos x}u_x-\dfrac{\cos^2 x\cos y}{\sin y}u_y=0,$ $\cos x\sin y\neq 0$
164	$x^4u_{xx}-2x^2yu_{xy}+y^2u_{yy}+y(2x+1)u_y=0\,,\ \ x^2+y^2\neq 0$
165	$\sin^4 xu_{xx}+2\sin^2 xu_{xy}+u_{yy}-\sin 2xu_y=0$
166	$e^{2x}u_{xx}+2u_{xy}+2e^{-2x}u_{yy}+2e^{2x}u_x=0$
167	$\cos^4 xu_{xx}+\sin^4 xu_{yy}-2\cos^4 x\,\mathrm{tgx}\,u_x+2\cos^4 y\operatorname{tg}^3 yu_y=0,$ $\cos x\sin x\neq 0$
168	$\operatorname{tg}^2 xu_{xx}-2y\operatorname{tg} xu_{xy}+y^2u_{yy}+y\left(\operatorname{tg}^2 x+2\right)u_y=0\,,$ $y^2+\operatorname{tg}^2 x\neq 0$
169	$e^{2y}xu_{xx}+3e^yu_{xy}+2u_{yy}+e^yu_x-u_y=0$

170	$x^4u_{xx}+4x^2u_{xy}+5u_{yy}+2x^3u_x=0$, $x\neq 0$
171	$\sin^2 yu_{xx}-4\sin yu_{xy}+4u_{yy}=0$
172	$u_{xx}+2\,\mathrm{ctg}\,xu_{xy}+\mathrm{ctg}^2u_{yy}=0$
173	$\mathrm{tg}^2xu_{xx}+\mathrm{ctg}^2yu_{yy}+\mathrm{tg}^3xu_x-\dfrac{\mathrm{tg}^2y+1}{\mathrm{tg}^3y}u_y=0$, $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\neq 0$
174	$\left(x^2+9\right)u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+\dfrac{2x^2y}{9+x^2}u_y=0$, $y\neq 0$
175	$5u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+\dfrac{1}{5}u_y=0$
176	$u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+4u_x-4u_y=0$
177	$4u_{xx}-8u_{xy}+3u_{yy}+2u_x-u_y=0$
178	$2u_{xx}-5u_{xy}+3u_{yy}+2u_x-4u_y=0$
179	$2u_{xx}-2u_{xy}+5u_{yy}+u_x+u_y=0$
180	$3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}+3u_x-u_y=0$
181	$5u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=0$
182	$5u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+6\left(u_x-u_y\right)=0$
183	$9u_{xx}-12u_{xy}+4u_{yy}+3u_x-2u_y=0$
184	$5u_{xx}-8u_{xy}+5u_{yy}+3\left(u_x-2u_y\right)=0$
185	$3u_{xx}+5u_{xy}-2u_{yy}+7\left(u_x+2u_y\right)=0$
186	$3u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-3u_x+u_y=0$
187	$xu_{xx}-4x^3u_{yy}-u_x=0$, $x\neq 0$
188	$x^2u_{xx}-6xyu_{xy}+9y^2u_{yy}+12yu_y=0$, $x^2+y^2\neq 0$
189	$4y^2u_{xx}-u_{yy}+\dfrac{1}{y}u_y=0$, $y\neq 0$

190	$e^{y}u_{xy} - u_{yy} + \left(1+e^{y}\right)u_{y} = 0$
191	$4y^{2}u_{xx} - 4yu_{xy} + u_{yy} - \frac{1}{y}u_{y} = 0,\ y \neq 0$
192	$\cos^{2} y u_{xx} - 2\cos y u_{xy} + u_{yy} + x\cos^{2} y u_{x} +$ $+ (\operatorname{tg} y - x\cos y)u_{y} = 0$
193	$u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^{2} x u_{yy} = 0$
194	$\sin y u_{xy} + u_{yy} + \left(\frac{\sin y}{x} - \operatorname{ctg} y\right)u_{y} = 0$
195	$9x^{2}u_{xx} - 6xyu_{xy} + y^{2}u_{yy} + yu_{y} = 0,\ x^{2} + y^{2} \neq 0$
196	$x^{2}u_{xx} + \cos^{4} y u_{yy} + xu_{x} = 0,\ x\cos y \neq 0$
197	$\sin^{2} y u_{xx} + 2\sin y u_{xy} + u_{yy} + \cos y u_{x} = 0$
198	$e^{2y}u_{xx} + 3e^{y}u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{y} = 0$
199	$y^{2}u_{xx} + 4u_{yy} + \frac{1}{y}u_{y} = 0,\ y \neq 0$
200	$y^{2}u_{xx} - 2ye^{x}u_{xy} + e^{2x}u_{yy} - y^{2}u_{x} - \frac{e^{2x}}{y}u_{y} = 0,\ y \neq 0$
201	$u_{xx} - 4xu_{xy} + 8x^{2}u_{yy} - \frac{1}{x}u_{x} + u_{y} = 0,\ x \neq 0$
202	$y^{2}u_{xx} + 4x^{2}yu_{xy} + 4x^{4}u_{yy} + 2x^{2}u_{x} + 4xyu_{y} = 0,$ $x^{2} + y^{2} \neq 0$
203	$\cos^{2} y u_{xx} - 4\cos y u_{xy} + 4u_{yy} + 2\sin y u_{x} = 0$
204	$u_{xx} + e^{y}u_{xy} + \frac{5}{4}e^{2y}u_{yy} + \frac{5}{4}e^{2y}u_{y} = 0$
205	$u_{xx} - \sin x u_{xy} + (\sin x - \operatorname{ctg} x)u_{x} = 0,\ \sin x \neq 0$
206	$2xu_{xy} - yu_{yy} - 3u_{y} = 0,\ x \neq 0$
207	$4xu_{xy} - yu_{yy} = 0,\ x \neq 0$

208	$u_{xy}-2xu_{yy}+\frac{1}{x^2+y}\left(u_x-2xu_y\right)+1=0$
209	$\frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}u_{xx}-2y\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}u_{xy}+y^2u_{yy}+2yu_y=0$

Нижче наведено відповіді до задач, отримані з використанням у середовищі MATLAB скрипту *canonical_form.m*. У випадку рівнянь параболічного або еліптичного типу користувачу пропонується вибрати варіант розрахунку, що використовує, якщо це можливо, представлення коефіцієнтів рівняння у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної (Flag=1) або ні (Flag=0). Відображено відповіді, що супроводжуються різними замінами змінних у залежності від варіанту розв'язку (перша заміна відповідає випадку Flag=0, друга – Flag=1). У деяких відповідях вказано варіант, якому слід надати перевагу, щоб отримати найпростіший вигляд рівняння. У третьому стовпці в скороченому вигляді вказується тип отриманого рівняння (Еліпт. – еліптичний, Параб. – параболічний, Гіпер. – гіперболічний).

ВІДПОВІДІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 1

№	Канонічна форма, заміна	Тип
1	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=y^2-x^2+,\eta=y+x$	Гіпер.
2	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{y}{x},\eta=xy$	Гіпер.
3	$u_{\xi\eta}-\frac{3}{4\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{y}{x^3},\eta=xy$	Гіпер.
4	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\frac{y}{x},\eta=y$ або $\xi=\ln\frac{y}{x},\eta=y$	Параб.
5	$u_{\xi\eta}-1=0$, $\xi=y-x-\cos x$, $\eta=y+x-\cos x$	Гіпер.
6	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_{\eta}=0$, $\xi=y-3x,\eta=y+x$	Гіпер.
7	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=xy,\eta=y$ або $\xi=\ln(xy),\eta=y$	Параб.
8	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\xi}-u_{\eta}=0$, $\xi=2x+y,\eta=-x$	Еліпт.
9	$u_{\eta\eta}+u_{\xi}-2u_{\eta}+u=0$, $\xi=x+y,\eta=y$	Параб.
10	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\xi}-u_{\eta}=0$, $\xi=-\operatorname{arcsh}x,\eta=-\operatorname{arcsh}y$	Еліпт.
	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\xi}-u_{\eta}=0$, $\xi=\operatorname{arcsh}y,\eta=-\operatorname{arcsh}x$	
11	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)u+\frac{1}{2}=0$, $\xi=-\operatorname{arcsh}x+\operatorname{arcsh}y$, $\eta=-\operatorname{arcsh}x-\operatorname{arcsh}y$	Гіпер.
12	$u_{\xi\eta}-u_{\xi}=0$, $\xi=x+y,\eta=2x+y$	Гіпер.
13	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=-x+\operatorname{arctg}y$, $\eta=-x-\operatorname{arctg}y$	Гіпер.
14	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{32}(\xi+\eta)(u_{\xi}+u_{\eta})=0$, $\xi=y+\sin x-2x$, $\eta=y+\sin x+2x$	Гіпер.

15	$u_{\eta\eta}+2\dfrac{\xi+\eta^2}{\xi-\eta^2}u_\xi=0$, $\xi=2e^x+y^2, \eta=y$ $u_{\eta\eta}+\dfrac{2\xi+\eta^2}{2\xi-\eta^2}u_\xi=0$, $\xi=e^x+\dfrac{y^2}{2}, \eta=y$	Параб.
16	$u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{4}=0$, $\xi=y+\cos x-\sin x$, $\eta=y+\cos x+\sin x$	Гіпер.
17	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y-\sin x-x$, $\eta=y-\sin x+x$	Гіпер.
18	$u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\xi-\eta}{2}\left(u_\xi+u_\eta\right)=0$, $\xi=y+\cos x-x$, $\eta=y+\cos x+x$	Гіпер.
19	$u_{\xi\eta}-\dfrac{1}{\xi}u_\eta=0$, $\xi=y-x, \eta=\dfrac{y}{x}$	Гіпер.
20	$u_{\xi\eta}-\dfrac{1}{4}u=0$, $\xi=y-x+\cos x$, $\eta=y-x-\cos x$	Гіпер.
21	$u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{4(\xi+\eta)}\left(u_\xi+u_\eta\right)=0$, $\xi=y^2-e^x, \eta=y^2+e^x$	Гіпер.
22	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{\xi-\eta}u_\xi=0$, $\xi=y^2-2x, \eta=-2x$ або $\xi=\dfrac{y^2}{2}-x, \eta=-x$	Еліпт.
23	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y^2-x, \eta=y+x$	Гіпер.
24	$u_{\xi\eta}-\dfrac{1}{2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\left(\eta u_\xi-\xi u_\eta\right)=0$, $\xi=y^2-x^2, \eta=y^2+x^2$	Гіпер.

25	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=y^2, \eta=-x^2$ або $\xi=\frac{y^2}{2}, \eta=-\frac{x^2}{2}$	Еліпт.
26	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{4\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{y}{x}, \eta=yx^3$	Гіпер.
27	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y-x^2, \eta=y^2+x^2$	Гіпер.
28	$u_{\xi\eta}+\frac{\xi}{\xi^2-2\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=x+y, \eta=x^2+y^2$	Гіпер.
29	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2}u_{\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}=0$, $\xi=y^2, \eta=-2\ln x$ $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{y^2}{2}, \eta=-\ln x$	Еліпт.
30	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=y, \eta=-\frac{x^2}{2}$	Еліпт.
31	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\eta}=0$, $\xi=y, \eta=-\ln x$	Еліпт.
32	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}=0$, $\xi=y^2, \eta=-2x$ або $\xi=\frac{y^2}{2}, \eta=-x$	Еліпт.
33	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{\xi^2+2\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{y}{\sqrt{x}}, \eta=y+\frac{x}{2}$	Гіпер.
34	$u_{\xi\eta}-\frac{3}{16}u_{\xi}-\frac{11}{16}u_{\eta}=0$, $\xi=y-x, \eta=\frac{x}{3}+y$	Гіпер.
35	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\eta}=0$, $\xi=y-2x, \eta=-x$	Еліпт.
36	$u_{\eta\eta}-8u_{\xi}-5u_{\eta}+4u=0$, $\xi=y-x, \eta=y$	Параб.
37	$u_{\xi\eta}+\frac{7}{2}u_{\xi}+u_{\eta}-u=0$, $\xi=y-3x, \eta=y-x$	Гіпер.

38	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{\xi-\eta}u_{\xi}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=y^2-x^2,\eta=-x^2$ або $\xi=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2},\eta=-\frac{x^2}{2}$	Еліпт.
39	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+4u_{\xi}-4u_{\eta}+2u=0$, $\xi=y-\frac{x}{2},\eta=-\frac{x}{2}$	Еліпт.
40	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}u_{\xi}+\frac{1}{\eta-\xi}u_{\eta}=0$, $\xi=\frac{x^2}{2}+y,\eta=y$	Параб.
41	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{16}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0$, $\xi=y-x,\eta=y+3x$	Гіпер.
42	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\eta}=0$, $\xi=y+3x,\eta=-x$	Еліпт.
43	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{2}u_{\xi}=0$, $\xi=y-\frac{x}{2},\eta=x$	Параб.
44	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cos\eta u_{\zeta}=0$, $\xi=y-\cos x,\eta=-x$	Еліпт.
45	$u_{\xi\eta}-\frac{3}{7}u_{\eta}+\frac{6}{49}=0$, $\xi=y-\frac{x}{3},\eta=y+2x$	Гіпер.
46	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=-x^2-2x+y,\eta=y-x^2$	Гіпер.
47	$u_{\xi\eta}+\frac{9}{50}u_{\xi}-\frac{48}{25}u_{\eta}=0$, $\xi=y-x,\eta=y+9x$	Гіпер.
48	$u_{\eta\eta}-\frac{2}{\eta^2+e^{2\xi}}u_{\xi}=0$, $\xi=y\csc x-y\,\mathrm{ctg}\,x,\eta=y$	Параб.
	$u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}u_{\xi}=0$, $\xi=\ln\left(y\csc x-y\,\mathrm{ctg}\,x\right),\eta=y$	
49	$u_{\xi\eta}+\frac{3}{4}u_{\xi}-\frac{1}{4}u=0$, $\xi=y-4x,\eta=y$	Гіпер.
50	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u=0$, $\xi=y,\eta=-\ln(\sin x)$	Еліпт.

51	$u_{\eta\eta}+(5\sin\eta-\cos\eta)u_\xi-5u_\eta-u=0$, $\xi=\cos y-x, \eta=y$ $u_{\eta\eta}+(\cos\eta-5\sin\eta)u_\xi-5u_\eta-u=0$, $\xi=-\cos y+x, \eta=y$	Параб.
52	$u_{\eta\eta}+\frac{\xi}{2\eta\left(2\eta+\xi\sqrt{\eta}\right)}u_\xi=0$, $\xi=2y^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}, \eta=x$	Параб. Flag=1
53	$u_{\eta\eta}+\operatorname{tg}\eta\, u_\eta=0$, $\xi=y\sin x, \eta=x$ або $\xi=\ln(y\sin x), \eta=x$	Параб.
54	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2-\eta+\xi}u_\eta=0$, $\xi=y+\frac{x^2}{2}-x, \eta=y+\frac{x^2}{2}+x$	Гіпер.
55	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_\xi=0$, $\xi=-x+e^{-y}, \eta=e^{-y}$ $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\xi-u_\eta=0$, $\xi=\frac{1}{2}x-e^{-y}, \eta=-\frac{1}{2}x$	Еліпт.
56	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{2}u_\xi+u=0$, $\xi=y-\frac{x^2}{4}, \eta=x$	Параб.
57	$u_{\xi\eta}+\frac{\eta-\xi}{(\eta-\xi)^2+1}u_\xi=0$, $\xi=y-\operatorname{sh}x, \eta=y$	Гіпер.
58	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}=0$, $\xi=y^3-\frac{3}{2}x, \eta=y+\frac{x}{2}$	Гіпер.
59	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\eta}{2}u_\xi=0$, $\xi=y+2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}, \eta=-x$	Еліпт.
60	$u_{\eta\eta}+\sin\eta\, u_\xi=0$, $\xi=y-\sin x, \eta=x$	Параб.
61	$u_{\xi\eta}+(6\eta+\xi)u_\xi-(\xi+\eta)u_\eta=0$, $\xi=y-x, \eta=x$	Гіпер.

62	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\dfrac{1}{e^x\cos y},\eta=y$ або $\xi=-\ln(\cos y)-x,\eta=y$	Параб.
63	$u_{\xi\eta}-\dfrac{5}{16}u_\xi+\dfrac{1}{4}u_\eta+\dfrac{3}{4}u=0$, $\xi=y-\dfrac{x}{4},\eta=x$	Гіпер.
64	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-x-\cos y,\eta=y$	Параб.
65	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\ln(\cos x)+y,\eta=y$	Параб.
66	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\dfrac{1}{3}u_\eta=0$, $\xi=y-x,\eta=-3x$	Еліпт.
67	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-2e^{\frac{x}{2}},\eta=-2e^{\frac{y}{2}}$ або $\xi=2e^{\frac{y}{2}},\eta=2e^{\frac{x}{2}}$	Еліпт.
68	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\dfrac{3}{2}u_\xi+\dfrac{1}{4}u=0$, $\xi=y-x,\eta=-2x$	Еліпт.
69	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{\eta}u_\eta=0$, $\xi=y,\eta=-e^x$	Еліпт.
70	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y-\sin x,\eta=x$	Параб.
71	$u_{\xi\eta}+3u_\xi-u_\eta+2u=0$, $\xi=y-2x,\eta=x$	Гіпер.
72	$u_{\eta\eta}+u_\xi=0$, $\xi=-\ln x+y,\eta=y$	Параб.
73	$u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{\xi-\eta}u_\eta=0$, $\xi=y-e^x,\eta=y+e^x$	Гіпер.
74	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_\xi\cos\eta=0$, $\xi=y+\cos x,\eta=-x$	Еліпт.
75	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-6u_\xi-3u_\eta=0$, $\xi=y-\dfrac{2}{5}x,\eta=-\dfrac{x}{5}$	Еліпт.
76	$u_{\xi\eta}+u_\xi=0$, $\xi=y-\dfrac{1}{2}e^{-x},\eta=x$	Гіпер.
77	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{\eta}(u_\eta-u_\xi)=0$, $\xi=ye^{-x},\eta=e^{-x}$	Еліпт.

78	$u_{\xi\eta}-4u_{\eta}=0$, $\xi=y-x, \eta=x$	Гіпер.
79	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\eta-\xi)}(u_{\xi}-u_{\eta})=0$, $\xi=e^{y}-x, \eta=-e^{y}-x$	Гіпер.
80	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y, \eta=-x-\frac{x^{3}}{3}$	Еліпт.
81	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{3}u_{\eta}=0$, $\xi=-2x+y, \eta=x+y$	Гіпер.
82	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\xi}=0$, $\xi=y-\frac{x^{2}}{2}, \eta=-x$	Еліпт.
83	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}\sin(\xi-\eta)(u_{\xi}+u_{\eta})=0$, $\xi=y+\frac{1}{2}\sin x-\frac{x}{2}$, $\eta=y+\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}$	Гіпер.
84	$u_{\eta\eta}+\frac{6}{\xi-\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=y-2e^{x}, \eta=y$	Параб.
85	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-5u_{\xi}=0$, $\xi=y-x, \eta=-x$	Еліпт.
86	$u_{\xi\eta}+3u_{\xi}=0$, $\xi=y+e^{x}, \eta=x$	Гіпер.
87	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\ln(\cos x)+y, \eta=-x$	Еліпт.
88	$u_{\xi\eta}+6u_{\xi}-u_{\eta}=0$, $\xi=y-x, \eta=y-\frac{x}{2}$	Гіпер.
89	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{\xi+\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=-x-\frac{1}{2e^{y}}, \eta=x$ $u_{\eta\eta}+\frac{4}{\xi+2\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=-2x-\frac{1}{e^{y}}, \eta=x$	Параб.
90	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\ln y-\frac{x^{2}}{2}, \eta=-\frac{3x^{2}}{2}$	Еліпт. Flag=1
91	$u_{\xi\eta}+u_{\xi}+2\xi u_{\eta}=0$, $\xi=y, \eta=8x+y^{2}$	Гіпер.

92	$u_{\eta\eta}-\frac{2}{9}u_{\eta}=0$, $\xi=y-3x, \eta=y$	Параб.
93	$u_{\eta\eta}+2u_{\xi}=0$, $\xi=2x^2+y^2, \eta=y$ $u_{\eta\eta}+u_{\xi}=0$, $\xi=x^2+\frac{1}{2}y^2, \eta=y$	Параб.
94	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3}\left(u_{\xi}-u_{\eta}\right)+u=0$, $\xi=y, \eta=-3x$	Еліпт.
95	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=3e^{-y}-x, \eta=x$ або $\xi=-e^{-y}+\frac{1}{3}x, \eta=x$	Параб.
96	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y-2\sin x, \eta=-x$	Еліпт.
97	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{4}u_{\xi}-\frac{1}{8}u_{\eta}=0$, $\xi=y-x, \eta=y+3x$	Гіпер.
98	$u_{\xi\eta}+\frac{9}{16}u_{\xi}+\frac{5}{16}u_{\eta}=0$, $\xi=y, \eta=y+\frac{4}{3}x$	Гіпер.
99	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{12}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0$, $\xi=y-2x, \eta=y+4x$	Гіпер.
100	$u_{\xi\eta}+u_{\xi}=0$, $\xi=y, \eta=-x-e^{y}$	Гіпер.
101	$u_{\eta\eta}-u_{\eta}=0$, $\xi=y+\ln x, \eta=y$	Параб.
102	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2+\eta^4}u_{\xi}+\frac{2\eta}{1+\eta^2}u_{\eta}=0$, $\xi=y(\csc x-\operatorname{ctg} x)$, $\eta=-\frac{\sin x}{\cos x+1}$ або $\xi=\frac{y\sin x}{\cos x+1}$, $\eta=\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$; для спрощення вибрана вказана заміна для η замість запропонованої $\eta=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	Еліпт.

103	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{2}u_{\eta}=0$, $\xi=y-2x, \eta=y$	Параб.
104	$u_{\xi\eta}+\frac{2}{\xi+\eta}u_{\xi}-1=0$, $\xi=2e^{2y}-x, \eta=x$	Гіпер.
105	$u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{(\xi^2+\eta^2)}u_{\xi}=0$, $\xi=y(\csc x-\operatorname{ctg} x), \eta=y$	Параб.
	$u_{\eta\eta}-\frac{2}{(\eta^2+e^{2\xi})}u_{\xi}=0$, $\xi=\ln(y(\csc x-\operatorname{ctg} x)), \eta=y$	
106	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}u_{\xi}+\frac{1}{6}u_{\eta}+\frac{1}{4}u=0$, $\xi=y-6x, \eta=y$	Гіпер.
107	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta-\xi}u_{\xi}=0$, $\xi=y-e^{x}, \eta=y$	Параб.
108	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{5}{4}u_{\xi}=0$, $\xi=y-\frac{8x}{5}, \eta=-\frac{4x}{5}$	Еліпт.
109	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\ln(\cos x)+y, \eta=y$	Параб.
110	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3}u_{\eta}=0$, $\xi=y-2x, \eta=-3x$	Еліпт.
111	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi+\eta)}(u_{\xi}+u_{\eta})=0$, $\xi=-e^{x}-\cos y, \eta=-e^{x}+\cos y$	Гіпер.
112	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{9}\sin\frac{\eta}{3}u_{\xi}=0$, $\xi=y+\sin x, \eta=-3x$	Еліпт.
113	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=e^{-x}-\frac{1}{3}e^{-y}, \eta=-e^{-y}+e^{-x}$	Гіпер.
114	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{\eta-\xi}u_{\xi}=0$, $\xi=y+e^{-x}, \eta=y$	Гіпер.
115	$u_{\xi\eta}-u_{\xi}-u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{x^2}{2}-x, \eta=y+\frac{x^2}{2}+x$	Гіпер.

116	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\frac{x^2}{2}-\cos y, \eta=y$	Параб.
117	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{\eta}\left(u_\xi+u_\eta\right)=0$, $\xi=e^{-y}-x, \eta=e^{-y}$ $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{2}{\xi+\eta}u_\xi=0$, $\xi=-e^{-y}+\frac{x}{2}, \eta=-\frac{x}{2}$	Еліпт.
118	$u_{\eta\eta}-\frac{3}{4}u_\xi-\frac{1}{4}u_\eta+\frac{3}{4}u=0$, $\xi=y-2x, \eta=y$	Параб.
119	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{64}u_\xi-\frac{15}{64}u_\eta=0$, $\xi=y, \eta=y+8x$	Гіпер.
120	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{\sin^2\eta}u_\xi=0$, $\xi=\ln(\sin x)+y, \eta=x$	Параб.
121	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y-\operatorname{sh}x, \eta=y$	Гіпер.
122	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{\cos\eta-1}u_\xi=0$, $\xi=\ln\left(x(\csc y-\operatorname{ctg} y)\right), \eta=y$	Параб. Flag=1
123	$u_{\xi\eta}+\eta u=0$, $\xi=-\frac{x^2}{2}-\operatorname{ch}y, \eta=x$	Гіпер.
124	$u_{\eta\eta}+2e^{\eta}u_\xi+4u=0$, $\xi=2e^{y}-x, \eta=y$ $u_{\eta\eta}+e^{\eta}u_\xi+4u=0$, $\xi=e^{y}-\frac{x}{2}, \eta=y$	Параб.
125	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\xi+\frac{1}{2}u_\eta=0$, $\xi=y-2x, \eta=-2x$	Еліпт.
126	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{2}{e^{2\eta}-1}u_\eta=0$, $\xi=-\operatorname{arctg}\left(e^x\right)+y$, $\eta=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)-x$	Еліпт.
127	$u_{\xi\eta}+u_\eta=0$, $\xi=y, \eta=4x+y^2$	Гіпер.

128	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{3}u_{\xi}-2u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{1}{3}x, \eta=y$	Параб.
129	$u_{\eta\eta}+u_{\xi}-\frac{1}{3}u_{\eta}+\frac{1}{3}u=0$, $\xi=y+3x, \eta=y$	Параб.
130	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y, \eta=\frac{1}{2}e^{-y}-x$	Гіпер.
131	$u_{\eta\eta}+2u_{\xi}-2u=0$, $\xi=y+2x, \eta=y$	Параб.
132	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=-x-2\operatorname{ch} y, \eta=x$	Гіпер.
133	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{2}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0$, $\xi=y+2x, \eta=x$	Параб.
134	$u_{\xi\eta}-\frac{3}{2}u_{\xi}-3u_{\eta}=0$, $\xi=y+x, \eta=y+\frac{5x}{3}$	Гіпер.
135	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\cos\eta u_{\xi}=0$, $\xi=-x+\cos y, \eta=-y$	Еліпт.
136	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\xi}=0$, $\xi=-x-\frac{y^{2}}{2}, \eta=y$	Еліпт.
137	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{\xi}{\eta^{2}}u_{\xi}+\frac{1}{\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=ye^{-x}, \eta=e^{-x}$	Еліпт.
138	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\sin\eta u_{\xi}=0$, $\xi=-x+\sin y, \eta=-y$	Еліпт.
139	$u_{\xi\eta}-\frac{3}{4\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{y}{x}, \eta=y\sqrt[3]{x}$	Гіпер.
140	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta-\xi}u_{\xi}=0$, $\xi=y+e^{x}, \eta=y$	Параб.
141	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\eta}-u_{\xi}=0$, $\xi=\ln y, \eta=-\frac{x^{2}}{2}$	Еліпт. Flag=1
142	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\xi}=0$, $\xi=\ln y, \eta=-x$	Еліпт. Flag=1
142	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\xi}+u_{\eta}=0$, $\xi=\ln y, \eta=-\ln x$	Еліпт. Flag=1
144	$u_{\xi\eta}+u_{\eta}=0$, $\xi=y, \eta=4x+y^{2}$	Гіпер.

145	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\xi}=0$, $\xi=-x-\frac{1}{2}y^2, \eta=y$	Еліпт.
146	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{\xi}{\eta^2}u_{\xi}+\frac{1}{\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=ye^{-x}, \eta=e^{-x}$	Еліпт.
147	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{20}{9}u_{\xi}-\frac{7}{3}u_{\eta}=0$, $\xi=y+2x, \eta=-3x$	Еліпт.
148	$u_{\xi\eta}+\frac{3}{50}u_{\xi}-\frac{1}{25}u_{\eta}=0$, $\xi=y-3x, \eta=y+\frac{x}{3}$	Гіпер.
149	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{2}u_{\eta}=0$, $\xi=y-2x, \eta=x$	Параб.
150	$u_{\xi\eta}+\frac{13}{2}u_{\xi}+7u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{x}{4}, \eta=y+\frac{x}{2}$	Гіпер.
151	$u_{\eta\eta}+\frac{3}{2}u_{\xi}+2u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{x}{4}, \eta=y$	Параб.
152	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi}=0$, $\xi=-\frac{1}{2}\ln(y-x)-\frac{1}{2}\ln(y+x)$, $\eta=\frac{1}{2}\ln(y-x)-\frac{1}{2}\ln(y+x)$	Еліпт. Flag=0
153	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=y^2-\frac{x^2}{5}, \eta=-\frac{2x^2}{5}$ або $\xi=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{10}, \eta=-\frac{x^2}{5}$	Еліпт.
154	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\xi}=0$, $\xi=y, \eta=2e^{-\frac{x}{2}}$	Еліпт.
155	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{5}{2}u_{\xi}+\frac{5}{2}u_{\eta}=0$, $\xi=\ln\left(yx^{\frac{1}{5}}\right), \eta=-\frac{2}{5}\ln x$	Еліпт. Flag=1

156	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y^3-\cos x, \eta=x$ або $\xi=\frac{1}{9}\left(y^3-\cos x\right), \eta=x$	Параб.
157	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}u_{\xi}=0$, $\xi=xy, \eta=-2x$	Еліпт.
158	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\ln(\cos x)+y, \eta=3\ln(\cos x)$ або $\xi=\ln(\cos x)+y, \eta=-\frac{3}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$	Еліпт.
159	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{5}u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{x}{5}, \eta=x$	Параб.
160	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\sin y+\cos x, \eta=x$ або $\xi=\sin y-\cos x, \eta=x$	Параб.
161	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y-2x, \eta=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$	Гіпер.
162	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=\operatorname{tg} y-x, \eta=x$	Параб.
163	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\sin x, \eta=\cos y$ або $\xi=-\cos y, \eta=-\sin x$	Еліпт.
164	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=ye^{-\frac{1}{x}}, \eta=x$ або $\xi=\ln y-\frac{1}{x}, \eta=x$	Параб.
165	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+y, \eta=x$ або $\xi=y+\operatorname{ctg} x, \eta=x$	Параб.
166	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y+\frac{1}{2e^{2x}}, \eta=\frac{1}{2e^{2x}}$	Еліпт.
167	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\operatorname{tg} x, \eta=\operatorname{ctg} y$ або $\xi=-\operatorname{ctg} y, \eta=-\operatorname{tg} x$	Еліпт.

168	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y\sin x, \eta=x$ або $\xi=\ln(y\sin x), \eta=x$	Параб.
169	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\eta-\xi)}u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{1}{2}e^{y}-x, \eta=e^{y}-x$	Гіпер.
170	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y+\frac{2}{x}, \eta=\frac{1}{x}$	Еліпт.
171	$u_{\eta\eta}+\cos\eta u_{\xi}=0$, $\xi=\frac{1}{2}\cos y-x, \eta=y$ $u_{\eta\eta}-\frac{1}{2}\cos\eta u_{\xi}=0$, $\xi=2x-\cos y, \eta=y$	Параб.
172	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{\sin^{2}\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=y-\ln(\sin x), \eta=x$	Параб.
173	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\eta}=0$, $\xi=-\ln(\cos y), \eta=-\ln(\sin x)$	Еліпт. Flag=1
174	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-2\operatorname{tg}\eta u_{\eta}=0$, $\xi=\ln y+\frac{1}{2}\ln(x^{2}+9), \eta=-\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$	Еліпт. Flag=1
175	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\xi}=0$, $\xi=y-\frac{2x}{5}, \eta=-\frac{x}{5}$	Еліпт.
176	$u_{\xi\eta}-u_{\xi}-3u_{\eta}=0$, $\xi=2x+y, \eta=4x+y$	Гіпер.
177	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{x}{2}, \eta=y+\frac{3x}{2}$	Гіпер.
178	$u_{\xi\eta}+4u_{\xi}+2u_{\eta}=0$, $\xi=y+x, \eta=y+\frac{3x}{2}$	Гіпер.
179	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3}u_{\xi}-\frac{1}{3}u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{x}{2}, \eta=-\frac{3x}{2}$	Еліпт.
180	$u_{\xi\eta}-\frac{3}{8}u_{\eta}=0$, $\xi=\frac{x}{3}=y, \eta=3x+y$	Гіпер.
181	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{4}u_{\eta}=0$, $\xi=y-x, \eta=y-\frac{x}{5}$	Гіпер.

182	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-4u_{\xi}-2u_{\eta}=0$, $\xi=y-\frac{x}{5}, \eta=-\frac{3x}{5}$	Еліпт.
183	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{3}u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{2x}{3}, \eta=x$	Параб.
184	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-2u_{\xi}-u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{4x}{5}, \eta=-\frac{3x}{5}$	Еліпт.
185	$u_{\xi\eta}-u_{\eta}=0$, $\xi=y-2x, \eta=y+\frac{x}{3}$	Гіпер.
186	$u_{\xi\eta}+\frac{3}{2}u_{\eta}=0$, $\xi=y+\frac{x}{3}, \eta=y+x$	Гіпер.
187	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y-x^2, \eta=y+x^2$	Гіпер.
188	$u_{\eta\eta}+\frac{4}{3\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=yx^3, \eta=y$ або $\xi=\ln\left(yx^3\right), \eta=y$	Параб.
189	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=y^2-x, \eta=y^2+x$	Гіпер.
190	$u_{\xi\eta}+u_{\xi}=0$, $\xi=-e^{y}-x, \eta=x$	Гіпер.
191	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=y^2+x, \eta=x$ або $\xi=\frac{y^2}{2}+\frac{x}{2}, \eta=x$	Параб.
192	$u_{\eta\eta}+u_{\eta}=0$, $\xi=-x-\sin y, \eta=x$ або $\xi=x+\sin y, \eta=x$	Параб.
193	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\cos\frac{\xi-\eta}{2}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0$, $\xi=y+\cos x-x$, $\eta=y+\cos x+x$	Гіпер.
194	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=-x-\cos y, \eta=x$	Гіпер.

195	$u_{\eta\eta}-\frac{\xi}{3\eta^2}u_\xi=0$, $\xi=yx^{\frac{1}{3}},\eta=x$	Параб.
	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{3\eta^2}u_\xi=0$, $\xi=\ln\left(yx^{\frac{1}{3}}\right),\eta=x$	
196	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{2\eta}{\eta^2+1}u_\eta=0$, $\xi=-\ln x,\eta=-\operatorname{tg} y$	Еліпт.
	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{2\xi}{\xi^2+1}u_\xi=0$, $\xi=\operatorname{tg} y,\eta=-\ln x$	
197	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\cos y-x,\eta=y$	Параб.
198	$u_{\xi\eta}=0$, $\xi=\frac{1}{2}e^y-x,\eta=e^y-x$	Гіпер.
199	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{\xi}u_\xi=0$, $\xi=y^2,\eta=-4x$ або $\xi=\frac{y^2}{2},\eta=-2x$	Еліпт.
200	$u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}u_\eta=0$, $\xi=y^2+2e^x,\eta=y$ або $\xi=\frac{y^2}{2}+e^x,\eta=y$	Параб.
201	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{4\eta}u_\xi=0$, $\xi=y+x^2,\eta=-x^2$	Еліпт.
202	$u_{\eta\eta}+\frac{6\eta^2}{3\xi+4\eta^3}u_\eta=0$, $\xi=y^2-\frac{4x^3}{3},\eta=x$	Параб.
	$u_{\eta\eta}+\frac{3\eta^2}{3\xi+2\eta^3}u_\eta=0$, $\xi=\frac{y^2}{2}-\frac{2x^3}{3},\eta=x$	

203	$u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-x-\frac{1}{2}\sin y, \eta=y$, $\xi=2x+\sin y, \eta=y$	Параб.
204	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$, $\xi=-\frac{2}{5}e^{-y}+x, \eta=\frac{4}{5}e^{-y}$, $\xi=-e^{-y}-\frac{x}{2}, \eta=-x$	Еліпт.
205	$u_{\xi\eta}-u_{\eta}=0$, $\xi=y, \eta=y-\cos x$	Гіпер.
206	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=yx^{\frac{1}{2}}, \eta=x$	Гіпер.
207	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{4\eta}u_{\xi}=0$, $\xi=yx^{\frac{1}{4}}, \eta=x$	Гіпер.
208	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{\xi}u_{\eta}+1=0$, $\xi=y+x^2, \eta=x$	Гіпер.
209	$u_{\eta\eta}+\frac{1}{1+\eta^2}\left(\xi u_{\xi}+\eta u_{\eta}\right)=0$, $\xi=y\operatorname{ch}x, \eta=\operatorname{sh}x$ $u_{\eta\eta}+\frac{1}{1+\eta^2}\left(u_{\xi}+\eta u_{\eta}\right)=0$, $\xi=\ln\left(y\operatorname{ch}x\right), \eta=\operatorname{sh}x$	Параб.

КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ДРЧП У ЗАДАНИХ ОБЛАСТЯХ ЗМІНИ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

Оскільки дискримінант характеристичного рівняння в залежності від значень незалежних змінних x і y може набувати значень різних знаків, виникає проблема його оцінювання, що не може бути реалізовано на основі стандартних програмних засобів MATLAB, які використовують символьний тип даних [1, 9, 10, 12, 15]. Щоб уникнути цієї ситуації, пропонується підхід, згідно з яким замість початкових змінних, позначених x_1, y_1, вводяться нові незалежні змінні x_2, y_2 за схемою:

$$x_2 = \begin{cases} x_1, x_1 > 0 \\ -x_1, x_1 < 0 \end{cases}, \quad y_2 = \begin{cases} y_1, y_1 > 0 \\ -y_1, y_1 < 0 \end{cases}.$$

Далі отримуємо рівняння, в якому змінні x_2, y_2 вже є додатними. Заміняємо їх квадратами нових змінних

$$x_2 = x^2, \; y_2 = y^2.$$

Для змінних x і y дискримінант стає знаковизначеним, і рівняння, записане відносно цих змінних, зводиться до канонічного вигляду за стандартною схемою, реалізованою програмою *canonical_form.m*. Нижче наведено текст файлу *xdiffer.m* разом з функцією *zamSqr.m*, що реалізують описаний підхід.

```
% Файл xdiffer.m
clc
syms x1 y1 x2 y2
syms x y positive
syms Du_x2 D2u_x2 Du_y2 D2u_y2 D2u_x2y2
syms Du_x1 Du_y1 D2u_x1 D2u_y1 D2u_x1y1
syms Du_x D2u_x Du_y D2u_y D2u_xy
% рівняння записується в змінних x1, y1
ufunc1=D2u_x1-x1*D2u_y1  %   x<0

% перший крок: усі змінні стають додатними
% нові додатні змінні -  x2, y2
znx1=input...
    ('Введіть знак: 1 (x1>0),-1 (x1<0): ');
znx2=input...
    ('Введіть знак: 1 (y1>0),-1 (y1<0): ');
if (znx1==1)
    x2=x1;
    else
    x2=-x1;
end;
if (znx2==1)
    y2=y1;
    else
    y2=-y1;
end;

% виражаємо похідні за новими змінними,
% використовуючи відомі формули
Du_x1=Du_x2*(diff(x2,'x1'))+Du_y2*...
(diff(y2,'x1'));

Du_y1=Du_x2*(diff(x2,'y1'))+Du_y2*...
(diff(y2,'y1'));

D2u_x1=D2u_x2*(diff(x2,'x1')^2)+2*D2u_x2y2*...
(diff(x2,'x1')*diff(y2,'x1'))+D2u_y2*...
(diff(y2,'x1')^2)+...
```

```
Du_x2*(diff(diff(x2,'x1'),'x1'))+...
Du_y2*(diff(diff(y2,'x1'),'x1'));

D2u_y1=D2u_x2*(diff(x2,'y1')^2)+2*D2u_x2y2*...
(diff(x2,'y1')*diff(y2,'y1'))+D2u_y2*...
(diff(y2,'y1')^2)+ ...
Du_x2*(diff(diff(x2,'y1'),'y1'))+...
Du_y2*(diff(diff(y2,'y1'),'y1'));

D2u_x1y1=D2u_x2*(diff(x2,'x1')* ...
diff(x2,'y1'))+D2u_x2y2*(diff(x2,'x1')*...
diff(y2,'y1')+diff(x2,'y1')* ...
diff(y2,'x1'))+D2u_y2*(diff(y2,'x1')*...
diff(y2,'y1'))+Du_x2*...
(diff(diff(x2,'x1'),'y1'))+Du_y2*...
(diff(diff(y2,'x1'),'y1'));

temp=subs(ufunc1,{'Du_x1','Du_y1','D2u_x1',...
'D2u_y1','D2u_x1y1'},{Du_x1, Du_y1, D2u_x1,...
 D2u_y1, D2u_x1y1})

% виражаємо старі змінні x1,y1
% через нові змінні x2,y2
[x1,y1]=solve(strcat(char(x2),'=x2'),...
strcat(char(y2),'=y2'),'x1','y1')
ufunc2=simple(subs(temp,{'x1','y1'},{x1,y1}))

% звернення до функції, в якій додатні змінні
% заміняються на квадрати нових змінних
    func=zamSqr(ufunc2);
% функція zamSqr перетворює рівняння
% до нового вигляду
% результат її роботи func може бути введено
% в основну програму canonical_form.m для
% зведення рівняння до канонічного вигляду
    func=strcat(char(func),'=0')
    func=simple(sym(func));
    func=expand(func)
```

```
%-------------------------------------------
% Функція zamSqr.m
% Перетворення рівняння до
% змінних  x=sqrt(x2), y=sqrt(y2)
function ufunc3=zamSqr(ufunc2)
   syms x2 y2 Du_x2 Du_y2 D2u_x2...
        D2u_y2 D2u_x2y2
   syms Du_x D2u_x D2u_y D2u_y2  D2u_xy Du_y u
% другий крок: дискримінант стає
% знаковизначеним
    ufunc2
    x=sqrt(x2)
    y=sqrt(y2)
% виражаємо похідні за новими змінними,
% використовуючи відомі формули

Du_x2=Du_x*(diff(x,'x2'))+Du_y*(diff(y,'x2'));

Du_y2=Du_x*(diff(x,'y2'))+Du_y*(diff(y,'y2'));

D2u_x2=D2u_x*(diff(x,'x2')^2)+2*D2u_xy*...
(diff(x,'x2')*diff(y,'x2'))+D2u_y*...
(diff(y,'x2')^2)+Du_x*...
(diff(diff(x,'x2'),'x2'))+Du_y*...
(diff(diff(y,'x2'),'x2'));

D2u_y2=D2u_x*(diff(x,'y2')^2)+2*D2u_xy*...
(diff(x,'y2')*diff(y,'y2'))+...
D2u_y*(diff(y,'y2')^2)+Du_x*...
(diff(diff(x,'y2'),'y2'))+Du_y*...
(diff(diff(y,'y2'),'y2'));

D2u_x2y2=D2u_x*(diff(x,'x2')*diff(x,'y2'))+...
D2u_xy*(diff(x,'x2')*diff(y,'y2')+...
diff(x,'y2')*diff(y,'x2'))+D2u_y*...
(diff(y,'x2')*diff(y,'y2'))+Du_x*...
(diff(diff(x,'x2'),'y2'))+Du_y*...
(diff(diff(y,'x2'),'y2'));
```

```
    temp=subs(ufunc2,{'Du_x2','Du_y2',...
    'D2u_x2','D2u_y2','D2u_x2y2'},...
    {Du_x2, Du_y2, D2u_x2, D2u_y2,D2u_x2y2});

% виражаємо старі змінні x2,y2 через
% нові змінні x,y
[x2,y2]=solve(strcat(char(x),'=x'),...
strcat(char(y),'=y'),'x2','y2')
    n1=length(x2);
    if(n1~=1)
       x2=x2(1);
    end;
    n2=length(y2);
    if(n2~=1)
       y2=y2(1);
    end;
    ufunc3=simple(subs(temp,{'x2','y2'},...
           {x2,y2}));
    can=ufunc3;

bf=subs(can,{'D2u_x','D2u_y','D2u_xy',...
   'Du_x','Du_y','u'},{0,0,0,0,0,0});
bf=simple(bf);

bl2=subs(can,{'D2u_x','D2u_y','D2u_xy',...
    'Du_x','Du_y','u'},{1,0,0,0,0,0})-bf;
bl2=simple(bl2);

bg2=subs(can,{'D2u_x','D2u_y','D2u_xy',...
    'Du_x','Du_y','u'},{0,1,0,0,0,0})-bf;
bg2=simple(bg2);

blg=subs(can,{'D2u_x','D2u_y','D2u_xy',...
    'Du_x','Du_y','u'},{0,0,1,0,0,0})-bf;
blg=simple(blg);

bl=subs(can,{'D2u_x','D2u_y','D2u_xy', ...
    'Du_x','Du_y','u'},{0,0,0,1,0,0})-bf;
bl=simple(bl);
```

```
bg=subs(can,{'D2u_x','D2u_y','D2u_xy',...
   'Du_x','Du_y','u'},{0,0,0,0,1,0})-bf;
bg=simple(bg);

bu=subs(can,{'D2u_x','D2u_y','D2u_xy',...
   'Du_x','Du_y','u'},{0,0,0,0,0,1})-bf;
bu=simple(bu);

can=bl2*D2u_x+bg2*D2u_y+blg*D2u_xy+...
    bl*Du_x+bg*Du_y+bu*u+bf;
can=simple(can);

ufunc3=expand(can);
```

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння $u_{x_1x_1} - x_1 u_{y_1y_1} = 0$ в області $x_1 < 0$.

Спочатку викликається програма *xdiffer.m.* У процесі її виконання вводяться нові змінні $x_2 = -x_1$, $y_2 = y_1$. У нових змінних рівняння набуває вигляду $u_{x_2x_2} + x_2 u_{y_2y_2} = 0$, причому змінні $x_2, y_2 > 0$. Далі відбувається виклик функції *zamSqr.m*, в якій вводяться нові незалежні змінні $x = \sqrt{x_2}$, $y = \sqrt{y_2}$. У нових змінних рівняння набуває вигляду $\frac{1}{4x^2}u_{xx} + \frac{1}{4}\frac{x^2}{y^2}u_{yy} - \frac{1}{4x^3}u_x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{y^3}u_y = 0$ або $xy^3u_{xx} + x^5yu_{yy} - y^3u_x - x^5u_y = 0$. Отримане рівняння є вхідним для основної програми зведення рівняння до канонічного вигляду *canonical_form.m.* Замінами $\xi = \frac{y^2}{2}$, $\eta = -\frac{x^3}{3}$ воно зводиться до канонічного вигляду $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0$. Повертаючись до старих змінних, отримаємо остаточну заміну $\xi = \frac{y_1}{2}$,

$\eta = -\frac{(-x_1)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 2

Визначити тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП 2-го порядку з двома незалежними змінними

1	$xu_{xx} - u_{yy} = 0$	$x > 0$
2	$xu_{xx} - u_{yy} = 0$	$x < 0$
3	$yu_{xx} - u_{yy} = 0$	$y > 0$
4	$yu_{xx} - u_{yy} = 0$	$y < 0$
5	$u_{xx} - xu_{yy} = 0$	$x > 0$
6	$u_{xx} - xu_{yy} = 0$	$x < 0$
7	$u_{xx} - yu_{yy} = 0$	$y > 0$
8	$u_{xx} - xu_{yy} = 0$	$y < 0$
9	$xu_{xx} - yu_{yy} = 0$	$x > 0$, $y > 0$
10	$xu_{xx} - yu_{yy} = 0$	$x < 0$, $y < 0$
11	$xu_{xx} - yu_{yy} = 0$	$x > 0$, $y < 0$
12	$xu_{xx} - yu_{yy} = 0$	$x < 0$, $y > 0$
13	$yu_{xx} - xu_{yy} = 0$	$x > 0$, $y > 0$
14	$yu_{xx} - xu_{yy} = 0$	$x < 0$, $y < 0$
15	$yu_{xx} - xu_{yy} = 0$	$x > 0$, $y < 0$
16	$yu_{xx} - xu_{yy} = 0$	$x < 0$, $y > 0$
17	$xyu_{xx} - u_{yy} = 0$	$x > 0$, $y > 0$
18	$xyu_{xx} - u_{yy} = 0$	$x < 0$, $y < 0$
19	$xyu_{xx} - u_{yy} = 0$	$x > 0$, $y < 0$
20	$xyu_{xx} - u_{yy} = 0$	$x < 0$, $y > 0$

21	$u_{xx} - xyu_{yy} = 0$	$x > 0$, $y > 0$
22	$u_{xx} - xyu_{yy} = 0$	$x < 0$, $y < 0$
23	$u_{xx} - xyu_{yy} = 0$	$x > 0$, $y > 0$
24	$u_{xx} - xyu_{yy} = 0$	$x < 0$, $y > 0$
25	$xu_{xx} + 2\sqrt{xy}u_{xy} + yu_{y} = 0$	$x > 0$, $y > 0$

Нижче наведено відповіді до завдань для самостійної роботи 2, отримані з використанням у середовищі MATLAB програмних файлів *xdiffer.m, zamSqr.m* і *canonical_form.m.*

ВІДПОВІДІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 2

№	Канонічна форма, заміна	Тип
1	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(u_{\xi}-u_{\eta}\right)=0$, $\xi=-2x^{\frac{1}{2}}+y$, $\xi=-2x^{\frac{1}{2}}+y$	Гіпер.
	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2(\xi+\eta)}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0$, заміна для порівняння $\xi=2x^{\frac{1}{2}}-y$, $\xi=-2x^{\frac{1}{2}}+y$	
2	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=y$, $\eta=-2(-x)^{\frac{1}{2}}$ або $\xi=\frac{y}{2}$, $\eta=-(-x)^{\frac{1}{2}}$	Еліпт.
3	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0$, $\xi=-\frac{3}{2}x+y^{\frac{3}{2}}$, $\eta=\frac{3}{2}x+y^{\frac{3}{2}}$	Гіпер.
	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(u_{\xi}-u_{\eta}\right)=0$, заміна для порівняння $\xi=\frac{3}{2}x-y^{\frac{3}{2}}$, $\eta=\frac{3}{2}x+y^{\frac{3}{2}}$	
4	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_{\xi}=0$, $\xi=(-y)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=-\frac{3x}{2}$ або $\xi=\frac{(-y)^{\frac{3}{2}}}{3}$, $\eta=-\frac{x}{2}$	Еліпт.

5	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0$, $\xi=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+y,\ \eta=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+y$ $u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}(u_\xi+u_\eta)=0$, заміна для порівняння $\xi=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-y,\ \eta=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+y$	Гіпер.
6	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0$, $\xi=y,\ \eta=-\frac{2(-x)^{\frac{3}{2}}}{3}$ або $\xi=\frac{y}{2},\ \eta=-\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}}{3}$	Еліпт.
7	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2(\xi+\eta)}(u_\xi+u_\eta)=0$, $\xi=-\frac{x}{2}+y^{\frac{1}{2}},\ \eta=\frac{x}{2}+y^{\frac{1}{2}}$ $u_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0$, заміна для порівняння $\xi=\frac{x}{2}-y^{\frac{1}{2}},\ \eta=\frac{x}{2}+y^{\frac{1}{2}}$	Гіпер.
8	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}u_\xi=0,\ \xi=(-y)^{\frac{1}{2}},\ \eta=-\frac{x}{2}$	Еліпт.
9	$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}u_\xi+\frac{1}{\eta}u_\eta=0,\xi=x^{\frac{1}{2}},\ \eta=y^{\frac{1}{2}}$	Гіпер.
10	$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}u_\xi+\frac{1}{\eta}u_\eta=0,\xi=(-x)^{\frac{1}{2}},\eta=(-y)^{\frac{1}{2}}$	Гіпер.

11	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}u_{\xi}-\frac{1}{\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=x^{\frac{1}{2}}$, $\eta=(-y)^{\frac{1}{2}}$	Еліпт.
12	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}u_{\xi}-\frac{1}{\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=(-x)^{\frac{1}{2}}$, $\eta=y^{\frac{1}{2}}$	Еліпт.
13	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}(\eta u_{\xi}-\xi u_{\eta})=0$, $\xi=y^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$, $\eta=y^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}$	Гіпер.
14	$u_{\xi\eta}-\frac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}(\eta u_{\xi}-\xi u_{\eta})=0$, $\xi=(-y)^{\frac{3}{2}}-(-x)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=(-y)^{\frac{3}{2}}+(-x)^{\frac{3}{2}}$	Гіпер.
15	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_{\xi}+\frac{1}{3\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=(-y)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=-x^{\frac{3}{2}}$ або $\xi=\frac{(-y)^{\frac{3}{2}}}{3}$, $\eta=-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}$	Еліпт.
16	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_{\xi}+\frac{1}{3\eta}u_{\eta}=0$, $\xi=y^{\frac{3}{2}}$, $\eta=-(-x)^{\frac{3}{2}}$ або $\xi=\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}$, $\eta=-\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}}{3}$	Еліпт.
17	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{2\xi+\eta}{\xi^2-\eta^2}u_{\xi}-\frac{1}{3}\frac{2\eta+\xi}{\xi^2-\eta^2}u_{\eta}=0$, $\xi=y^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}$, $\eta=y^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$ $u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{\eta-2\xi}{\xi^2-\eta^2}u_{\xi}+\frac{1}{3}\frac{2\eta-\xi}{\xi^2-\eta^2}u_{\eta}=0$, заміна для порівняння $\xi=-y^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$, $\eta=y^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$	Гіпер.

18	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{2\xi+\eta}{\xi^2-\eta^2}u_\xi-\frac{1}{3}\frac{2\eta+\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\eta=0$, $\xi=(-y)^{\frac{3}{2}}-3(-x)^{\frac{1}{2}}$, $\eta=(-y)^{\frac{3}{2}}+3(-x)^{\frac{1}{2}}$ $u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{\eta-2\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\xi+\frac{1}{3}\frac{2\eta-\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\eta=0$, заміна для порівняння $\xi=-(-y)^{\frac{3}{2}}+3(-x)^{\frac{1}{2}}$, $\eta=(-y)^{\frac{3}{2}}+3(-x)^{\frac{1}{2}}$	Гіпер.
19	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_\xi-\frac{1}{\eta}u_\eta=0$, $\xi=(-y)^{\frac{3}{2}}$, $\eta=-3x^{\frac{1}{2}}$ або $\xi=\frac{(-y)^{\frac{3}{2}}}{3}$, $\eta=-x^{\frac{1}{2}}$	Еліпт.
20	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}u_\xi-\frac{1}{\eta}u_\eta=0$, $\xi=y^{\frac{3}{2}}$, $\eta=-3(-x)^{\frac{1}{2}}$ або $\xi=\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}$, $\eta=-(-x)^{\frac{1}{2}}$	Еліпт.
21	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{\eta-2\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\xi+\frac{1}{3}\frac{2\eta-\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\eta=0$, $\xi=y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $\eta=y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{2\xi+\eta}{\xi^2-\eta^2}u_\xi-\frac{1}{3}\frac{2\eta+\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\eta=0$, заміна для порівняння $\xi=-y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $\eta=y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$	Гіпер.

22	$u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{\eta-2\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\xi+\frac{1}{3}\frac{2\eta-\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\eta=0$, $\xi=(-y)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}},\ \eta=(-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$ $u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}\frac{2\xi+\eta}{\xi^2-\eta^2}u_\xi-\frac{1}{3}\frac{2\eta+\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\eta=0$, заміна для порівняння $\xi=-(-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}},\eta=(-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$	Гіпер.
23	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_\eta-\frac{1}{\xi}u_\xi=0$, $\xi=(-y)^{\frac{1}{2}},\ \eta=-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$,	Еліпт.
24	$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_\eta-\frac{1}{\xi}u_\xi=0$, $\xi=y^{\frac{1}{2}},\ \eta=-\frac{1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$	Еліпт.
25	$u_{\xi\eta}+\frac{\xi}{4\eta\left(\eta+\xi\sqrt{\eta}\right)}u_\xi=0,\ \xi=y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}},\eta=x$	Гіпер.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Означення лінійного ДРЧП 2-го порядку з двома незалежними змінними.
2. Схема зведення лінійного ДРЧП 2-го порядку з двома незалежними змінними до канонічного вигляду.
3. Поняття про характеристичне рівняння лінійного ДРЧП та його характеристики.
4. Означення ДРЧП гіперболічного типу.
5. Означення ДРЧП еліптичного типу.
6. Означення ДРЧП параболічного типу.
7. Інваріантність типу рівняння при перетворенні змінних.
8. Перша канонічна форма рівняння гіперболічного типу.
9. Друга канонічна форма рівняння гіперболічного типу.
10. Канонічна форма рівняння параболічного типу.
11. Канонічна форма рівняння еліптичного типу.
12. Заміна незалежних змінних у випадку рівняння гіперболічного типу.
13. Заміна незалежних змінних у випадку рівняння параболічного типу.
14. Заміна незалежних змінних у випадку рівняння еліптичного типу.
15. Основні структури керування мови MATLAB.
16. Основні функції для роботи із символьними об'єктами
17. Особливості використання функцій у системі MATLAB. Виклик М-функцій.
18. Функції мінімізації та знаходження коренів у MATLAB.
19. Функції для розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь у системі MATLAB.
20. Функції введення і виведення даних у системі MATLAB.
21. Особливості застосування програмних засобів системи MATLAB для класифікації та зведення до канонічного вигляду ДРЧП 2-го порядку з двома незалежними змінними.
22. Особливості застосування програмних засобів системи MATLAB для класифікації та зведення до канонічного вигляду ДРЧП 2-го порядку в заданих областях зміни незалежних змінних.

ДОДАТОК. ПРОГРАМА ЗВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

```
% Програмний файл canonical_form.m
clear
clc
syms x y D2u_x D2u_y D2u_xy Du_y Du_x u
syms x y  positive
syms Dy Dx Du_l Du_g D2u_l D2u_g D2u_lg

% Приклади рівнянь різних типів

% 1 гіпербол.
% func=y*D2u_x+(x-y)*D2u_xy-x*D2u_y

% 2 параб.
% func=x^2*D2u_x+2*x*y*D2u_xy+y^2*D2u_y

% 3 еліпт.
  func=D2u_x-4*D2u_xy+5*D2u_y+Du_x-Du_y

% 4 гіпербол.
% func=D2u_x-2*cos(x)*D2u_xy-...
% (3+sin(x)^2)*D2u_y-y*Du_y

% 5 параб.
% func=y^2*D2u_x-...
% 2*y*exp(x)*D2u_xy+exp(2*x)*D2u_y

% 6 еліпт.
% func=x^2*y^2*D2u_x+D2u_y

type=1/3;  % показник типу, ініціалізуємо
           % довільним значенням
% якобіан перетворення, ініціалізуємо нулем
```

```
Ja=0;
% отримуємо коефіцієнти a11, a12, a22 і f

% отримуємо вільний член,
% значення похідних покладаємо =0
f=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{0,0,0,0,0,0});

% отримуємо коеф-ти: значення похідної, при
% якій обчислюємо коефіцієнт, покладаємо =1;
% значення інших похідних покладаємо =0;
% віднімаємо f

a11=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{1,0,0,0,0,0})-f;
a22=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{0,0,1,0,0,0})-f;

% для знаходження коефіцієнта при мішаній
% похідній її покладаємо =1/2
a12=subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y',...
'Du_x','Du_y','u'},{0,1/2,0,0,0,0})-f;

% обчислюємо дискримінант рівняння
D= a12^2-a11*a22;

% конструкція try ... catch... end
% - блок виведення помилок

try

    D=double(D);
    % намагаємося отримати числове значення
    % дискримінанта; в залежності від
    % його знаку визначаємо тип рівняння
    if(D>0)
         type=1; % гіперболічного типу
         disp('Рівняння гіперболічного типу ')
```

```
    elseif(D<0)
         type=-1; % еліптичного типу
         disp('Рівняння еліптичного типу ')
    elseif(D==0)
         type=0; % параболічного типу
         disp('Рівняння  параболічного типу ')
    end;

catch % якщо D - функція від x,y D=D(x,y)

    if(simple(D)==0)
       type = 0
    else

       v=cell(1,2); % створюємо вектор v
       % заміняємо x на v(1), y на v(2)
       temp=subs(D,{'x','y'},{'v(1)','v(2)'});

       % створюємо функцію користувача
       temp=inline(char(temp),'v') ;
       [m,fmin]=fminsearch(temp,[0,0]);
       % якщо min(D)>=0, то
       % рівняння гіперболічного типу
       if (fmin>=0)
           type=1;
       else
            % ще треба перевірити рівняння
            % на еліптичність; оскільки
            % функція пошуку максимуму
            % відсутня, обійдемося
            % пошуком мінімуму функції -D

      temp=subs(-D,{'x','y'},{'v(1)','v(2)'});
           temp=inline(char(temp),'v');
           [m,fmin]=fminsearch(temp,[0,0]);
           if (fmin>=0) % якщо min(-D)>0,
                        % рівняння еліпт. типу
              type=-1;
```

```
            end;
        end;
    D=simple(sym(D));
    end;
end;

% приймаємо позначення для нових змінних:
% l - ксі, g - ета

type
bb=0   % лічильник bb = 0 або 1
% передбачена можливість
% спрощення правої частини ДР

if (type==1) % гіперболічний тип
    disp('Гіперболічний тип ')
    if(a11==0)
        dydx1=simple(a22/(2*a12))
        dydx2=simple(a11)
    else
        % перша характеристика dy/dx
        dydx1=simple((a12+sym(D)^(1/2))/a11)
        % друга характеристика dy/dx
        dydx2=simple((a12-sym(D)^(1/2))/a11)
        while (bb==0)
            disp('Вираз спрощено?:')
            disp('1 -так,0 - ні')
            bb=input('Введіть bb=');
            if (bb==0)
       dydx1=input('Права частина першого= ');
       dydx2=input('Права частина другого= ');
                bb=1
            end
        end;
    end;

    tet1=subs(dydx1,{'x','y'},{x,y});
    tet1=sym(tet1);
```

```
tet2=subs(dydx2,{'x','y'},{x,y});
tet2=sym(tet2);
first=strcat('Dy=',char(tet1));
secnd=strcat('Dy=',char(tet2));

% розв'язуємо ДР dy/dx=(a12+D^(1/2))/a11
temp1=dsolve(char(first),'x');
n1=length(temp1);  % кількість розв'язків

if(n1~=1)
           % беремо перший розв'язок
           temp1=char(temp1(1));
           m1=findstr(temp1,'-');
           if(length(m1)~=0)
               if(m1(1)==1)
                  temp1 =-sym(temp1);
               end
           end
end;

temp1=char(temp1);
% довжина рядка розв'язку
mm=length(temp1);

if(mm<=2)
    t1=char(temp1);
    r1=t1-y;
    temp1=strcat(char(r1),'=0');
else
   last1=...
   temp1(length(temp1)-3:length(temp1));
   if ~(strcmp(last1,' = 0'))
      disp('Останній символ не 0:')
      disp('приписуємо 0 у кінці ')
      t1=char(temp1);
      r1=t1-y;
      temp1=strcat(char(r1),'=0');
   end;
```

```
end;

% розв'язуємо ДР
% відносно довільної сталої
tt1=solve(temp1,'C1');
% перша заміна для l(x,y);
l=subs(tt1,{'x','y'},{x,y});
l=simple(l)

% розв'язуємо ДР dy/dx=(a12-D^(1/2))/a11
temp2=dsolve(char(secnd),'x');

n2=length(temp2); % кількість розв'язків

if(n2~=1)
   % беремо перший розв'язок
   temp2=char(temp2(1));
   m2=findstr(temp2,'-')
   if(length(m2)~=0)
       if(m2(1)==1)
          temp2 =-sym(temp2)
       end
   end
end;

temp2=char(temp2);
% довжина рядка розв'язку
nn=length(temp2);

if(nn<=2)
   t2=char(temp2);
   if (a11==0)
      % відсутня друга похідна за x
      r2=t2-x;
   else
      r2=t2-y;
   end;
   temp2=strcat(char(r2),'=0');
```

```
    else
       last2=...
       temp2(length(temp2)-3:length(temp2));
       if ~(strcmp(last2,' = 0'))
          disp('Останній символ не 0:')
          disp('приписуємо 0 у кінці ')
          t2=char(temp2);
          r2=t2-y;
          temp2=strcat(char(r2),'=0');
       end;
    end;

   % розв'язуємо ДР відносно довільної сталої

   tt2=solve(temp2,'C1');

   % друга заміна для g(x,y)
   g=subs(tt2,{'x','y'},{x,y});
   g=simple(g)

   disp('Чи підходять заміни?')
   disp('Чи слід взяти іншу: ')
   disp('fl=1 - Підходить, =0 - Ні,')
   disp('=2 - Приклад не можна розв''язати')
   fl=input('fl= ');
   if (fl==0)
       l=input('Перша заміна: ')
       g=input('Друга заміна: ')
   end;
   if(fl==2)
   disp('fl=2 - Приклад не можна розв''язати')
   break
   end;
   Ja=simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-...
             diff(l,'y')*diff(g,'x'));

% --------------------------------------
elseif(type==-1) % еліптичний тип
```

```
%   post - сумарна кількість повторів
%   змінних x і y в коефіцієнті
    disp('Еліптичний тип')

Flag=input...
('Враховуємо добуток коеф-тів? Так 1, ні 0:')

    ip=1;
    if(Flag~=0)

         try
            a11=double(a11);
            a11=num2str(a11);
         catch

         end

    [b11,c11,post11]=Razdper(char(a11));

    if(a12~=0)

         try
            a12=double(a12);
            a12=num2str(a12);
         catch

         end

         try
            a22=double(a22);
            a22=num2str(a22);
         catch

         end
        [b12,c12,post12]=Razdper(char(a12));
    else
        post12=0;
```

```
 end;

 [b22,c22,post22]=Razdper(char(a22));

 post=post11+post12+post22
 if (post==0)
     disp('Еліптичне рівняння')
     disp('зі сталими коеф-тами.')
     disp('Для продовження - ')
     disp('натисни клавішу ')
     pause

 end
end

 if (Flag~=0)
 % a12~=0
 if (a12==0)

     Lfft=simple(sqrt(c11)/sqrt(c22));
     Rggt=...
     simple(sqrt(b22)/sqrt(b11)*sqrt(-1));
     % інтеграл від лівої частини
     ll=int(Lfft,y);
     % інтеграл від правої частини
     gg=int(Rggt,x);
     dydx=(ll-gg);
     tt3=char(dydx);
     tt3=subs(tt3,{'x','y'},{x,y});
     tt3=simple(tt3);

  else  % a12~=0

     D1=c12^2-c11*c22;

     try
           D1=double(D1);
           if(D1~=0)
```

```
                  ip=0;
              else
              ip=-1;
              end
        catch
             % якщо D1- функція від x,y
             if(simple(D1)==0)
                ip = -1;
             else
                ip=0;
             end
        end

        if(ip==-1)
           Lfft=simple((c11)/(c12));
           Db=b12^2-b11*b22;
           Db=simple(sym(Db));
           Rggt=(b12+sqrt(Db))/b11;
           ll=int(Lfft,y);
           gg=int(Rggt,x);
           dydx=(ll-gg);
           tt3=char(dydx);
           tt3=subs(tt3,{'x','y'},{x,y});
           tt3=simple(tt3);
        end;
     end;
    end;

% -------------------------------------------
    if((Flag==0) |(ip==0))
           disp(D);
           % комплексна  характеристика dy/dx
           dydx=simple((a12+sqrt(-1)*...
           (sym(-D))^(1/2))/a11);
           bb=0;
           while (bb==0)
               disp('Вираз спрощено?:')
               disp('1 - так,0 - ні')
```

```
        bb=input('Введіть bb=');
        if (bb==0)
          dydx=input('Права частина =')
          bb=1;
        end
    end;
    tet3=subs(dydx,{'x','y'},{x,y});
    tet3=sym(tet3);
    third=strcat('Dy=',char(tet3));
    % розв'язуємо ДР
    % dy/dx=(a12+D^(1/2))/a11
    temp3=dsolve(char(third),'x');
    n3=length(temp3); % к-ть розв'язків

    if(n3~=1)
        % беремо перший розв'язок
        temp3=char(temp3(1));
        m1=findstr(temp3,'-');
        if(length(m1)~=0)
            if(m1(1)==1)
               temp3 =-sym(temp3);
            end
        end
    end;
    temp3=char(temp3);
    last3=...
  temp3(length(temp3)-3:length(temp3));

    if ~(strcmp(last3,' = 0'))
       disp('Останній символ не 0:')
       disp('приписуємо 0 в кінці ')
       t3=char(temp3);
       r3=t3-y;
      temp3=strcat(char(r3),'=0');
    end;
% розв'язуємо ДР відносно довільної сталої
    findstr(temp3,'C1');
    tt3=solve(temp3,'C1');
```

```
        tt3=subs(tt3,{'x','y'},{x,y});
        tt3=expand(tt3);
    end;

    % перша заміна для l(x,y)
    % обнуляємо уявну частину
    l=subs(tt3,{'i','j','sqrt(-1)'},{0,0,0});
    l=simple(l)

    % друга заміна для g(x,y)
    % усуваємо дійсну частину відніманням
    g=subs((tt3-l),{'i','j','sqrt(-1)'},...
          {1,1,1});
    g=simple(g)

    disp('Чи підходить заміна? ')
    disp('Чи слід взяти іншу: ')
    disp('fl=1 - Підходить, 0 - Ні,')
    disp('2 - Приклад не можна розв''язати')
    fl=input('fl= ');
    if (fl==0)
       l=input('Перша заміна: ')
       g=input('Друга заміна: ')
    end;
    if(fl==2)
   disp('fl=2 - Приклад не можна розв''язати')
   break
    end;
    Ja=simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-...
       diff(l,'y')*diff(g,'x'));

% --------------------------------------------
elseif(type==0)    %  параболічний тип
    Flag=input...
('Враховуємо добуток коеф-тів? Так 1, ні 0:')

    disp('Параболічний тип')
    if(Flag==0)
```

```
bb=0
% -----------------------------------
dydxp=simple(sym(a12)/sym(a11))
% характеристика dy/dx
% -----------------------------------
while (bb==0)
    disp('Вираз спрощено?:')
    disp('1 -так,0 - ні')
    bb=input('Введіть bb=');
    if (bb==0)
        dydxp=input('Права частина = ')
    end
end;

tet4=subs(dydxp,{'x','y'},{x,y});
tet4=sym(tet4);
fourth=strcat('Dy=',char(tet4));
% розв'язуємо ДР dy/dx=a12/a11
temp4=dsolve(char(fourth),'x');
n4=length(temp4);% кількість розв'язків

if(n4~=1)
    % беремо один розв'язок
    temp4=char(temp4(1));
    m2=findstr(temp4,'-');
    if(length(m2)~=0)
         if(m2(1)==1)
         temp4 =-sym(temp4);
    end
  end
end;
temp4=char(temp4);
last4=...
temp4(length(temp4)-3:length(temp4));
if ~(strcmp(last4,' = 0'))
    disp('Останній символ не 0:')
    disp('приписуємо 0 в кінці ')
    t4=char(temp4);
```

```
        r4=t4-y;
        temp4=strcat(char(r4),'=0');
    end;

% розв'язуємо ДР відносно довільної сталої
    tt4=solve(temp4,'C1');
    tt4=tt4(1);
    % перша заміна для l(x,y)
    l=subs(tt4,{'x','y'},{x,y});
    l=simple(l)
    disp(sprintf('\nПідходить заміна?'))
    disp('Так 1, ні 0')

else
 % Flag~=0 з урахуванням добутку коеф-тів

    try
       a11=double(a11);
       a11=num2str(a11);
    catch

    end
    [b11,c11,post11]=Razdper(char(a11));

    try
       a12=double(a12);
       a12=num2str(a12);
    catch

    end
    [b12,c12,post12]=Razdper(char(a12));

    try
       a22=double(a22);
       a22=num2str(a22);
    catch

    end
```

```
    [b22,c22,post22]=Razdper(char(a22));
    post=post11+post12+post22;

 if (post==0)
   disp('Параб. рівн. зі сталими коеф-ми')
   disp('Для продовженя - натисни клавішу')
   pause
 end

   Lfft=simple((c11)/(c12));
   Rggt=simple((b12)/(b11));
   % інтеграл від лівої частини
   ll=int(Lfft,y);
   % інтеграл від правої частини
   gg=int(Rggt,x);
   dydx=(ll-gg);
   tt3=char(dydx);
   tt3=subs(tt3,{'x','y'},{x,y});
   tt3=simple(tt3);
   %tt3=simplify(real(tt3))
   l=tt3
   l=simple(l)

end;
   % друга (довільна) заміна
   % вводиться користувачем;
   % приймаємо її, якщо якобіан
   % перетворення не дорівнює 0
   disp(sprintf('\n\t '))
   disp('Рівняння параболічного типу')
   disp(sprintf('\nЗнайдено лише'))
   disp('одну заміну для l(x,y):')
   disp(sprintf('l(x,y)=%s',char(l)))
   disp(sprintf('\nВведіть'))
   disp('другу заміну g(x,y):')
   g=input('g(x,y)=')
   Ja=simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-...
       diff(l,'y')*diff(g,'x'))
```

```
      while(Ja==0)
         disp('Якобіан перетворення =0')
         g=input('Введіть іншу заміну g(x,y)=')
         Ja=simple(diff(l,'x')*...
         diff(g,'y')-diff(l,'y')*diff(g,'x'));
      end;
end;

% -----------------------------------------
if(Ja~=0)

  % виражаємо похідні за новими змінними,
  % використовуючи відомі формули

  Du_x=simple(Du_l*(diff(l,'x'))+Du_g*...
      (diff(g,'x')))
  Du_y=simple(Du_l*(diff(l,'y'))+Du_g*...
      (diff(g,'y')))
  D2u_x=simple(D2u_l*(diff(l,'x')^2)+...
      2*D2u_lg*(diff(l,'x')*diff(g,'x'))+...
      D2u_g*(diff(g,'x')^2)+Du_l*...
      (diff(diff(l,'x'),'x'))+...
      Du_g*(diff(diff(g,'x'),'x')))
  D2u_y=simple(D2u_l*(diff(l,'y')^2)+...
      2*D2u_lg*(diff(l,'y')*diff(g,'y'))+...
      D2u_g*(diff(g,'y')^2)+Du_l*...
      (diff(diff(l,'y'),'y'))+...
      Du_g*(diff(diff(g,'y'),'y')))
  D2u_xy=simple(D2u_l*(diff(l,'x')*...
      diff(l,'y'))+D2u_lg*(diff(l,'x')*...
      diff(g,'y')+diff(l,'y')*diff(g,'x'))+...
      D2u_g*(diff(g,'x')*diff(g,'y'))+...
      Du_l*(diff(diff(l,'x'),'y'))+Du_g*...
      (diff(diff(g,'x'),'y')))

  % підставляємо знайдені похідні
  % в початкове рівняння
    temp=subs(func,{'Du_x','Du_y','D2u_x',...
```

```
        'D2u_y','D2u_xy'},...
        {Du_x,Du_y,D2u_x,D2u_y,D2u_xy});
    % спрощуємо отримане рівняння
    temp=simple(temp);

    % звернення до функції Calccof
    can=Calccof(type,temp);

    % виражаємо старі змінні x,y
    % через нові змінні l,g

    [x,y]=solve(strcat(char(l),'=l'),...
          strcat(char(g),'=g'),'x','y')
    n1=length(x);
    if(n1~=1)
       x=x(1);
    end;
    n2=length(y);
    if(n2~=1)
       y=y(1);
    end;

    %  для змінних x,y отримуємо канонічний
    %  вигляд рівняння;
    %  беремо лише одну пару x=x(1) y=y(1)

    can=simple(subs(can,{'x','y'},{x,y}));
    can=Calccof(type,can);
    can=strcat(char(can),'=0');
    can_form=[can, l, g, x, y ]
    disp('Перша заміна - ksi: ')
    disp(sprintf('\t l(x,y)= %s. ',char(l)))
    disp('Друга заміна - eta: ')
    disp(sprintf('\t g(x,y)= %s. ',char(g)))
    disp('Канонічна форма рівняння: ')
    disp(sprintf('\t %s. ',char(can)))

end;
```

```
% Функція Razdper.m
% Розклад коефіцієнта рівняння на
% добуток функцій, кожна з яких залежить
% лише від однієї змінної
function [strx,stry,post] = Razdper(cof)
syms x y
Cof=strrep(cof,'exp','EXP');
dl=length(Cof);
% номера, які займає символ 'x'
nx=findstr('x',Cof);
% номера, які займає символ 'y'
ny=findstr('y',Cof);
% номера, які займає символ '*'
nzv=findstr('*',Cof);
% кількість повторів символу 'x'
lx=length(nx);
% кількість повторів символу 'y'
ly=length(ny);
% кількість повторів символу '*'
lz=length(nzv);
post=lx+ly;

if(lx==0) % немає символу 'x' в рядку
disp('числовий множник віднести до strx')
     if(lz==0) % немає символу '*' в рядку
               % - нічого не змінюється
        disp('немає зірочки в рядку')
        lsc=length(findstr('(',Cof));
        lyy=length(findstr('y',Cof));
        if ((lsc+lyy)~=0)
            % у рядку є '(' або 'y'
            disp('множника немає')
            strx=sym(Cof/Cof);
            stry=sym(cof);
        else
            strx=sym(Cof);
            stry=sym(Cof/Cof);
        end;
```

```
    else
%    зірочка в рядку є;
%    якщо перед зірочкою немає 'y' або
%    дужки '(', то там константа, якщо є,
%    потрібно забирати увесь рядок
%    числовий множник переноситься у
%    функцію від x, тобто у strx
      num0=nzv(1);
      s=Cof([1:num0-1]);
      lsc=length(findstr('(',s));
      lyy=length(findstr('y',s));
         if ((lsc+lyy)~=0)
            % перед зірочкою є дужка або 'y'
            disp('множника немає')
            strx=sym(Cof/Cof);
            stry=sym(Cof);
         else
            disp('перехід у даний блок')
            strx=sym(Cof([1:num0-1]));
            stry=sym(Cof([num0+1:dl]));
         end
     end;
end;

if(ly==0)
    % немає  символу 'y' в рядку
    strx=sym(Cof);
    stry=sym(Cof/Cof);
end;
if((lx~=0)&(ly~=0))
     % у рядку є і символ 'x', і символ 'y'
     k=1;
     if(nx(1)>ny(1))
         disp('x далі y =')
         if (lz==1)
             num=nzv(lz);
         else
             while(nzv(k)<ny(ly))
```

```
                nzv(k);
                k=k+1;
            end;
            razd=k;
            num=nzv(razd);
        end;
        sprintf('номер зірочки %d',nzv(1));
        stry=sym(Cof([1:num-1]));
        strx=sym(Cof([num+1:dl]));
    else
        disp('y далі x ')
        if(lz==1)
            num=nzv(lz);
        else
            while(nzv(k)<nx(lx))
               nzv(k);
               k=k+1;
            end;
            razd=k;
            num=nzv(razd);
        end;
        strx=sym(Cof([1:num-1]));
        stry=sym(Cof([num+1:dl]));
    end
end

    vhvy=findstr('-',char(stry)); % номера
    lvy=length(vhvy); % кількість повторів
    if (lvy~=0)
      my=vhvy(1);
      if (my==1)
        strx=-(strx);
        stry=-(stry);
      end
    end
    strx=sym(strrep(char(strx),'EXP','exp'));
    stry=sym(strrep(char(stry),'EXP','exp'));
```

```
% Функція   Calccof.m
% Спрощення рівняння шляхом ділення
% на коефіцієнт при відповідній похідній

function can = Calccof(type,temp)
% вхідні параметри: type – тип рівняння
%          temp – вираз, що спрощується

syms x y D2u_x D2u_y D2u_xy Du_y Du_x u
syms x y  positive
syms Dy Dx Du_l Du_g D2u_l D2u_g D2u_lg

bf=simple(subs(temp,{'D2u_l','D2u_g',...
    'D2u_lg','Du_l','Du_g','u'},...
    {0,0,0,0,0,0}));

bl2=simple(subs(temp,{'D2u_l','D2u_g',...
    'D2u_lg','Du_l','Du_g','u'},...
    {1,0,0,0,0,0})-bf);

bg2=simple(subs(temp,{'D2u_l','D2u_g',...
    'D2u_lg','Du_l','Du_g','u'},...
    {0,1,0,0,0,0})-bf);

blg=simple(subs(temp,{'D2u_l','D2u_g',...
    'D2u_lg','Du_l','Du_g','u'},...
    {0,0,1,0,0,0})-bf);

bl=simple(subs(temp,{'D2u_l','D2u_g',...
    'D2u_lg','Du_l','Du_g','u'},...
    {0,0,0,1,0,0})-bf);

bg=simple(subs(temp,{'D2u_l','D2u_g',...
    'D2u_lg','Du_l','Du_g','u'},...
    {0,0,0,0,1,0})-bf);

bu=simple(subs(temp,{'D2u_l','D2u_g',...
    'D2u_lg','Du_l','Du_g','u'},...
```

```
    {0,0,0,0,0,1})-bf);

can=bl2*D2u_l+bg2*D2u_g+blg*D2u_lg+...
    bl*Du_l+bg*Du_g+bu*u+bf;

if(type==1)

    can=simple(bl2/blg*D2u_l+bg2/blg*...
        D2u_g+D2u_lg+bl/blg*Du_l+...
        bg/blg*Du_g+bu*u/blg+bf/blg)
    disp('Гіперболічний')

elseif(type==0)

    can=simple(can/bg2)
    disp('Параболічний')

elseif(type==-1)

    bl2==bg2;
    can=simple(can/bl2)
    disp('Еліптичний')

end
```

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ануфриев И. Е.* MATLAB 7 / И. Е. Ануфриев, А. Б. Смирнов, Е. Н. Смирнова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
2. *Бицадзе А. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, А. В. Калиниченко. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
3. *Борзенков А. В.* Дифференциальные уравнения в частных производных. MATLAB : конспект лекций / А. В. Борзенков. – Мн. : БГУИР, 2009. – 120 с.
4. *Будак В. М.* Сборник задач по математической физике / В. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М.: Наука, 1972. – 687 с.
5. Використання математичного пакета MATLAB для розв'язування прикладних задач: навчальний посібник / Є. С. Вакал, Б. П. Довгий, Ю. Є. Вакал, А. В. Попов. – К.: Укр. фітосоціолог. центр, 2012. – 78 с.
6. *Владимиров В. С.* Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1974. – 272 с.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
8. *Дьяконов В. П.* Математические пакеты расширения MATLAB: Специальный справочник / В. П. Дьяконов, В. В. Круглов. – СПб.: Питер, 2001. – 480 с.
9. *Кетков Ю. Л.* MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
10. Контрольні завдання з курсу "Рівняння математичної фізики" / Є. С. Вакал, Г. В. Верьовкіна, В. В. Личман, А. В. Ловейкін. – К.: Укр. фітосоціолог. центр, 2002. – 29 с.
11. *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

12. *Кривилев А. В.* Основы компьютерной математики с использованием системы MATLAB / А. В. Кривилев. – М.: Лекс-Книга, 2005. – 496 с.
13. *Маринець В. В.* Збірник задач з математичної фізики / В. В. Маринець, М. О. Перестюк, В. Л. Рего. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 252 с.
14. *Перестюк М. О.* Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К.: Либідь, 2001. – 336 с.
15. *Потемкин В. Г.* Справочник по MATLAB / В. Г. Потемкин [Електронний ресурс]. – Режим доступу : *http://www.nsu.ru/matlab/MatLab_RU/ml/book2/index.asp.htm* (15.01.2003).
16. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 577 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ВАКАЛ Євген Сергійович
ВАКАЛ Юлія Євгеніївна

КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМИ MATLAB

Навчальний посібник

Формат 60x84$^{1/16}$. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 5.6.
Гарнітура Times New Roman.
Підписано до друку 12. 06. 2017 р.

Видавництво ТОВ «Основа»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців
ДК № 1981 від 21. 10. 2004 р.
01032, м. Київ-32, вул. Жилянська, 87/30.
Тел.: (044) 584-38-97; т/ф: 584-38-95, 584-38-96.