

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Б.П.Довгий
А.В.Ловейкін
Є.С.Вакал
Ю.Є.Вакал

СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник

КИЇВ – 2016

УДК 681.3.06

ББК

Д

Рецензенти:

докт. фіз.-мат. наук, проф. М. Ф. Городній

докт. фіз.-мат. наук, проф. О. В. Капустян

*Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол №4 від 15 листопада 2016 року)*

Довгий Б.П.

Д

Слайн-функції та їх застосування / Б.П.Довгий, А.В.Ловейкін, Є.С.Вакал,
Ю.Є.Вакал. – К.:Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. – 117 с.
ISBN

Розглянуто основні відомості про сплайни і їх застосування до задач наближення функцій, чисельного диференціювання і інтегрування, наближеного розв'язання диференціальних і інтегральних рівнянь. Основну увагу приділено чисельним аспектам застосування сплайнів з використанням системи комп'ютерної математики MATLAB.

Для студентів, аспірантів і викладачів університетів, а також фахівців з математичної фізики і обчислювальної математики, що використовують сплайни в наукових дослідженнях.

УДК 681.3.06

ББК

Навчальне видання

ДОВГИЙ Борис Павлович
ЛОВЕЙКІН Андрій Вячеславович
ВАКАЛ Євген Сергійович
ВАКАЛ Юлія Євгенівна

СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник

Редактор –

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром “Київський університет”
Виконавець

Підписано до друку **22.11.2016** р. Формат 60x84 1/16. Вид.№ Гарнітура Times. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 100. Ум. друк. арк. **6.8**. Обл. вид. арк. **7.4**. Зам. № **691**.

Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”

01601, Київ, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43

(38044) 239 32 22; факс 9380440 239 31 28

Свідоцтво внесене до Державного реєстру ДК 1183 від 31.10.02.

E-mail: vydav_polyppgraph@univ.kiev.ua

ISBN

© Довгий Б.П., Ловейкін А.В., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., 2016
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ “Київський університет”

ПЕРЕДМОВА

В математиці та її застосуваннях постійно приходиться мати справу з наближеними представленнями функцій. Класичними формами таких представлень є поліноми і раціональні дроби. Теорія наближення функцій поліномами була розроблена в працях П. Л. Чебишова, К. Вейерштрасса, С. Н. Бернштейна та ін. Поліноми і раціональні дроби мають низку недоліків як апарат наближення для функцій з особливостями і для функцій з не дуже високою гладкістю. Основний недолік полягає в тому, що їх поведінка в околі деякої точки визначає їх поведінку в цілому. В зв'язку з цим в останні роки розробляються інші підходи до наближень, вільні від цього недоліку. Одним з таких підходів, що добре зарекомендував себе як в теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях, є використання так званих *сплайнів*.

Сплайнами називаються функції, які склеєні з різних кусків поліномів за фіксованою системою. Найпростіший приклад – ламані. Сплайни природно виникають в багатьох механічних задачах. Наприклад, форму сплайна має пружна балка з точковими навантаженнями. Серед сплайнів найважливішу роль відіграють поліноміальні сплайни, склеєні з кусків многочленів. Розвитку теорії таких сплайнів і їх популяризації сприяли праці І. Шенберга [1]. Поліноміальні сплайни починають використовуватися в багатьох прикладних задачах, пов'язаних з наближенням функцій.

Навчальне видання призначено для ознайомлення студентів з основними питаннями теорії поліноміальних сплайнів та їх застосувань в прикладних задачах. Значну увагу приділено побудові сплайнів з використанням системи комп'ютерної математики MATLAB.

В MATLAB реалізовано низку алгоритмів розв'язання задач обчислювальної математики і математичної фізики. Для застосування більшості можливостей пакета достатньо базових знань з чисельних методів. Розв'язання спеціальних задач, зрозуміло, вимагає відповідної теоретичної підготовки.

Система MATLAB вдало поєднує потужний апарат для математичних обчислень і розвинуті засоби програмування, що дає змогу говорити про неї як про універсальний інструмент для розв'язання складних науково-технічних обчислювальних задач.

За змістом видання поділено на теми, які містять основні відомості з теорії сплайн-функцій, алгоритми побудови інтерполяційних лінійних, квадратичних і кубічних сплайнів з урахуванням різних типів крайових умов.

Проілюстровано особливості застосування сплайнів для числового інтегрування і диференціювання функцій, наближеного розв'язання диференціальних і інтегральних рівнянь,

розглянуто обчислювальні аспекти теорії сплайн-функцій, зокрема можливості розв'язання задач наближення функцій в середовищі MATLAB.

У кінці кожної теми запропоновано варіанти завдань для аудиторної та самостійної роботи студента.

Навчальний посібник написано на основі курсу лекцій, що читався на механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Дане видання може бути корисне студентам університетів при виконанні завдань з обчислювальної математики, інформатики та спеціальних дисциплін, для обробки результатів математичних досліджень при курсовому і дипломному проектуванні, а також фахівцям, що цікавляться застосуваннями теорії сплайнів в задачах числового аналізу та інженерних розрахунках.

Тема №1

ОСНОВИ ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ТА ОБГРУНТУВАННЯ ВВЕДЕННЯ СПЛАЙНІВ

Теоретичні відомості

Задача інтерполяції. Більшість числових методів розв'язання задач математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної фізики так чи інакше пов'язана із апроксимацією (наближенням) функцій. Це власне задачі наближення (інтерполяція, згладжування), а також задачі, в яких апроксимація присутня як проміжний етап: числове диференціювання та інтегрування, числове розв'язання диференціальних рівнянь, крайових задач математичної фізики, інтегральних рівнянь тощо.

Типовою серед вказаних задач є задача інтерполяції функцій.

Нехай на відрізку $[a, b] \in \mathcal{R}$ задано впорядковані точки (вузли):

$$a = X_1 < X_2 < \dots < X_{n-1} < X_n = b. \quad (1.1)$$

Таку систему назвемо *сіткою* і введемо позначення:

$$\begin{aligned} \Delta_{[a,b]} &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_i, \\ \Delta_i &= [X_i, X_{i+1}], \\ h_i &= X_{i+1} - X_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

На сітці відомі значення деякої функції $u(x)$:

$$y_i = u(X_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тоді задача інтерполяції полягає в побудові деякої функції (*інтерполянти*)

$$\Phi_n(x, \vec{c}) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x), \quad (1.3)$$

яка в точках сітки отримує відомі нам значення:

$$\Phi_n(X_i, \vec{c}) = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тут \vec{c} – невідомі константи, $\phi_i(x)$ – деякі (відомі) функції, що утворюють *систему Чебишова* на $[a, b]$.

Класичний метод розв'язання вказаної задачі – це побудова інтерполяційного полінома $P_{n-1}(x; u)$, який можна подати у різних формах запису, наприклад:

форма Лагранжа:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\omega_n(x)}{(x - X_i) \omega_n'(X_i)}, \quad a \leq x \leq b,$$

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - X_i);$$

форма Ньютона:

$$N_{n-1}(x) = y_1 + (x - X_1)(y_{1;2} + (x - X_2)(y_{1;2;3} + \dots + (x - X_{n-1})y_{1;2;\dots;n})), \quad a \leq x \leq b,$$

$$y_{i;j} = \frac{y_i - y_j}{X_i - X_j}, y_{i;j;k} = \frac{y_{i;j} - y_{j;k}}{X_i - X_k}, \dots, y_{i;j;\dots;k;l} = \frac{y_{i;\dots;l} - y_{j;\dots;k}}{X_i - X_l}.$$

Даний підхід цілком виправданий, оскільки він ґрунтується на теоремі Вейерштрасса, яка стверджує, що довільну неперервну на відрізку функцію можна рівномірно із довільною точністю наблизити поліномом.

Природно очікувати, що для покращення точності наближень потрібно збільшувати кількість вузлів сітки, і при цьому буде мати місце *збіжність в точці* $x^* \in [a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x^*; u) = u(x^*) \quad (1.4)$$

або *рівномірну збіжність на відрізку* $[a, b]$

$$\max_{x \in [a,b]} |u(x) - P_n(x; u)| \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Проте виявляється, що на практиці межі застосування інтерполяційного полінома (ІП) на всьому відрізку досить обмежені.

По-перше, намагаючись збільшити точність наближення, ми повинні збільшити кількість вузлів інтерполяції, відповідно зростає степінь полінома, а при цьому зростає похибка обчислень з визначенням значення самого полінома.

По-друге, далеко не завжди можна гарантувати виконання локальної збіжності (1.4), чи збіжності в рівномірній нормі (1.5).

Властивість збіжності або розбіжності інтерполяційного процесу залежить як від вибору послідовності сіток, так і від гладкості функції $u(x)$. Відомі приклади нескладних функцій, для яких інтерполяційний процес розбігається.

Приклад Н. С. Бернштейна: послідовність ІП, побудованих на рівномірних сітках відрізка $[-1,1]$ для неперервної функції $u(x)=|x|$ не має локальної збіжності в точках цього відрізка, крім вузлів $-1, 0, 1$.

Приклад К. Рунге: послідовність ІП, побудованих на рівномірних сітках відрізка $[-1,1]$ для нескінченно диференційованої функції $u(x)=(1+25x^2)^{-1}$ не має рівномірної збіжності.

Інколи вказаних проблем можна уникнути, якщо вибрати спеціальним способом вузли сітки, або перейти до апроксимації за допомогою спеціальних поліномів. Однак такий шлях ускладнює задачу інтерполяції, бо втрачається одна з основних властивостей поліномів – їх простота в обчисленні.

Виходячи з практичних міркувань було запропоновано будувати не один ІП на всьому відрізку $[a,b]$, а використовувати *кусково-поліноміальну інтерполяцію*. В цьому випадку, на кожному інтервалі Δ_i застосовують поліном, як правило низького степеня. Коефіцієнти кожного з поліномів цієї системи визначають з умов інтерполяції на сітці та деяких додаткових умов – відомостей про функцію, що інтерполюється.

Побудована таким способом інтерполянта називається *сплайн-функцією* або просто *сплайном*. Перевага сплайнів перед звичайною інтерполяцією полягає у простоті обчислень полінома, стійкості процесу обчислень, збіжності.

Назва “сплайн” походить від англійського “spline”, що означає гнучку металеву лінійку, що використовувалась як лекало (інструмент кресляра для проведення гладкої лінії через задані точки площини). Профіль лінійки, розташований між двома сусідніми точками, математично описується кубічним поліномом.

Завдання для аудиторної роботи

1. Використовуючи вбудовану функцію MATLAB *polyfit*,

розглянути приклад Н. С. Бернштейна для значень послідовностей ІП, наприклад, при $n=3, 9, 15$. Інтерполянти і функцію розмістити: а) на одному графіку всі одночасно; б) послідовно для кожного значення n .

2. Виконати завдання 1 для $n=4, 10, 16$.

3. Використовуючи вбудовану функцію MATLAB *polyfit*, розглянути приклад К. Рунге для значень послідовностей ІП, наприклад, при $n=3, 9, 15$. Інтерполянти і функцію розмістити: а) на одному графіку всі одночасно; б) послідовно для кожного значення n .

4. Виконати завдання 3 для $n=4, 10, 16$.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати М-функцію $ip_L(X,y)$ – побудова інтерполяційного поліному у формі Лагранжа.

2. Написати М-функцію $ip_L(X,y,t)$ – обчислення в точці t інтерполяційного поліному у формі Лагранжа.

3. Написати М-функцію $ip_N(X,y)$ – побудова інтерполяційного поліному у формі Ньютона.

4. Написати М-функцію $ip_L(X,y,t)$ – обчислення в точці t інтерполяційного поліному у формі Ньютона.

5. Написати М-файл для тестування $ip_L(X,y)$. Порівняти результат з вбудованою функцією *polyfit*.

6. Написати М-файл для тестування $ip_L(X,y,t)$. Порівняти результат з вбудованою функцією *polyfit*.

7. Написати М-файл для тестування $ip_N(X,y)$. Порівняти результат з вбудованою функцією *polyfit*.

8. Написати М-файл для тестування $ip_N(X,y,t)$. Порівняти результат з вбудованою функцією *polyfit*.

9. Виконати завдання 1 аудиторної роботи для $n=3, 9, 15$, використовуючи М-функцію $ip_L(X,y)$.

10. Виконати завдання 1 аудиторної роботи для $n=3, 9, 15$, використовуючи М-функцію $ip_L(X,y,t)$.

11. Виконати завдання 2 аудиторної роботи для $n=4,10,16$, використовуючи М-функцію $ip_N(X,y)$.

12. Виконати завдання 2 аудиторної роботи для $n=4,10,16$, використовуючи М-функцію $ip_N(X,y,t)$.

Тема №2

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ СПЛАЙНІВ ТА ФОРМИ ЇХ ЗОБРАЖЕННЯ

Теоретичні відомості

Означення сплайнів. Нехай на відрізку $[a, b]$ задана сітка (1.1) з $n > 1$ вузлами.

Означення 2.1 Функція $S_{m,q}(x)$, $x \in [a, b]$ називається *сплайн-ном степеня $m > 0$ дефекту q ($0 \leq q \leq m$)*, якщо

а) на кожному відрізку Δ_i , $i = 1, \dots, n-1$ функція $S_{m,q}(x)$ є поліномом степеня m , тобто

$$S_{m,q}(x) = \sum_{k=0}^m s_{i,k} (x - X_i)^k, \quad x \in \Delta_i; \quad (2.1)$$

б) неперервна на $[a, b]$ разом з своїми похідними до степеня $m - q$ включно:

$$S_{m,q}(x) \in C^{m-q}([a, b]). \quad (2.2)$$

Означення 2.2 Сплайн $S_{m,q}(x)$, $x \in [a, b]$ називається *інтерполяційним* для функції $u(x)$ і позначається $S_{m,q}(x; u)$, якщо він задовольняє умову інтерполяції у вузлах сітки

$$S_{m,q}(X_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Зауваження.

- $S_{0,1}(x)$, $x \in [a, b]$ – *кусково-стала* функція. Її будемо визначати як сплайн степеня 0, для якого виконуються умови (2.2) зі значенням $q=1$.
- Враховуючи умови (2.2), усі сплайни степеня $m > 0$ є як мінімум неперервними функціями.
- У внутрішніх вузлах сітки значення сплайнів, визначених на сусідніх відрізках, співпадають.
- Для сплайна $S_{m,q}(x)$, $x \in \Delta_i$, можна вибрати інше, еквівалентне “сплайнове” зображення

$$S_{m,q}(x) = \sum_{k=0}^m \tilde{s}_{i,k} (x - X_{i+1})^k, \quad x \in \Delta_i, \quad (2.5)$$

або “поліноміальне” зображення

$$S_{m,q}(x) = \sum_{k=0}^m \tilde{s}_{i,k} x^k, \quad x \in \Delta_i. \quad (2.6)$$

Крім цих зображень, використовуються й інші представлення сплайна на відрізку Δ_i сітки.

Враховуючи, що при використанні системи комп’ютерної математики MATLAB ми будемо користуватися не тільки ІС означеними вище, а й іншими сплайнами, тому розглянемо ще деякі означення.

Означення 2.3 Функція $S_{3,2}(x; u)$, $x \in [a, b]$ називається *Ермітовим кубічним сплайном дефекту 2*, якщо:

а) на кожному відрізку Δ_i , $i = 1, \dots, n-1$ функція $S_{3,2}(x; u)$ є поліномом степеня 3;

б) $S_{3,2}(x) \in C^1([a, b]);$

в) задовольняє умову інтерполяції функції і її похідної у вузлах сітки

$$\begin{aligned} S_{3,2}(X_i; u) &= y_i \equiv u(X_i), \\ S'_{3,2}(X_i; u) &= \hat{y}_i \equiv u'(X_i), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

При обробці експериментальних результатів можуть виникати суттєві відносні похибки завдання функції на сітці (1.1), що негативно впливає на ІС і особливо на його похідні. В цьому випадку виникає необхідність побудови сплайна більш «плавного», ніж інтерполяційний. Такі сплайни називають згладжуючі, а процедура їх побудови згладжуванням.

Означення 2.4 Функція $S_{3,1}(x)$, $x \in [a, b]$ називається *згладжуючим кубічним сплайном дефекту 1*, якщо:

а) задовольняє умови (2.1), (2.2);

б) серед усіх функцій з класу $W_2^2([a, b])$ мінімізує функціонал

$$J(u(x)) = \int_a^b (u''(x))^2 dx + \sum_{i=1}^n \rho_i^{-1} (u(X_i) - \tilde{u}_i)^2, \quad x \in [a, b],$$

тобто, $J(u_Z(x)) = \min_{u \in W_2^3([a,b])} J(u(x))$, де \tilde{u}_i – задані значення згладжуваної функції в точках сітки (1.1), $\rho_i > 0$ – задані величини (чим менше значення коефіцієнта ρ_i , тим ближче $u_Z(X_i)$ наближається до \tilde{u}_i).

Matlab: згладжуючі сплайни. Звернення до функції, що будує згладжуючий сплайн, має вигляд:

$$output = csaps(x,y,p,xx,w)$$

Тут:

- x і y – дані, що апроксимуються;
- p – параметр згладжування ($0 < p < 1$);
- xx – абсциси контрольних точок;
- w – вектор ваг (за замовчуванням заповнений одиницями).

Згладжуючий сплайн f мінімізує вираз

$$p \sum_i w_i (y_i - f(x_i))^2 + (1-p) \int_{x_1}^{x_n} (f'')^2 dx.$$

При $p=0$ знаходиться лінійна функція, що забезпечує мінімум суми квадратів відхилень у вузлових точках, при $p=1$ — звичайний кубічний сплайн.

Тип вихідної змінної $output$ залежить від способу звернень до функції $csaps$. Якщо звернення містить параметр xx , то $output$ представляє собою вектор значень сплайна в контрольних точках (тобто, фактично це yy). Якщо ж звернення має скорочений вигляд $output=csaps(x,y,p)$ або $output=csaps(x,y,p,[])$, то $output$ — кусково-поліноміальна форма.

Приклад 1. Скласти програму побудови згладжуючих сплайнів з різними параметрами згладжування.

Нижче наведено текст відповідного М-файла і результати його виконання (рис. 1).

```
% Приклад 1
clc
x = -4:4;
y = [0 .15 1.12 2.36 2.36 1.46 .49 .06 0];
xlabel('x'); ylabel('y'); hold on
plot(x,y,'ko');
xx = [x(1):0.25:x(length(x))]
w = ones(length(x),1);
csl = csaps(x,y,1,[],w);

line1=plot(xx, ppval(csl,xx),'k-');
set(line1,'linewidth',1.5);
cs07 = csaps(x,y,0.7,[],w);

line2=plot(xx, ppval(cs07,xx),'k--');
set(line2,'linewidth',1.5);
cs05 = csaps(x,y,0.5,[],w);

line3=plot(xx, ppval(cs05,xx),'k:');
set(line3,'linewidth',1.5);
cs0 = csaps(x,y,0,[],w);

line4=plot(xx, ppval(cs0,xx),'k-.');
set(line4,'linewidth',1.5);
title('Згладжений
сплайн','FontName','Courier','FontSize',13)
hL=legend('дані','p = 1.0','p = 0.7',...
'p = 0.5','p = 0',0);
set(hL,'FontName','Courier')
set(gca,'FontSize',11);
```

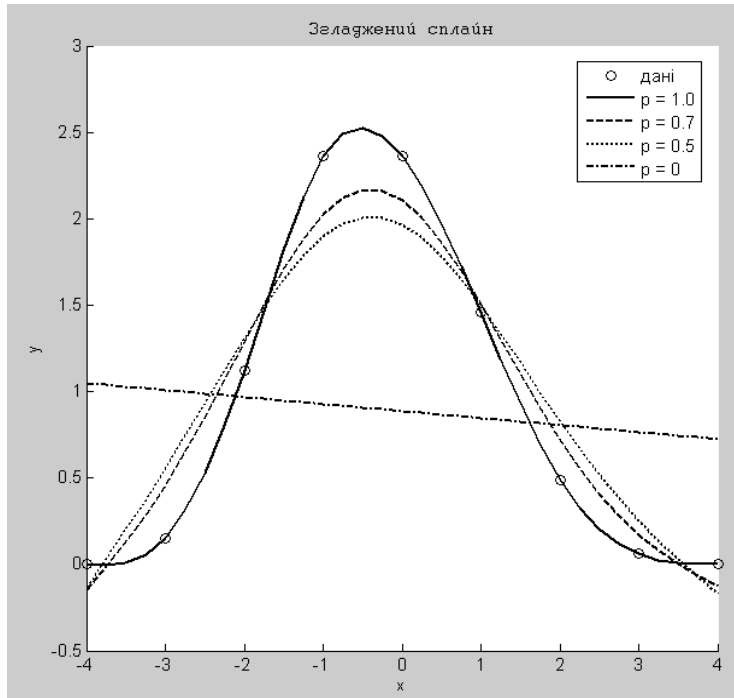


Рис. 1. Згладжуючі сплайни з різними значеннями ρ

У випадку наближення сплайнами плоских кривих, які задано параметрично ($x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$), а також при розв'язанні деяких прикладних задач математичної фізики, зручно вводити сітку типу (1.1) для параметра τ і будувати сукупність ІС $\{S_{m,q}(\tau; x), S_{m,q}(\tau; y)\}$, яка називається *інтерполяційним параметричним сплайном*.

Matlab: параметрична апроксимація. Припустимо, що на координатній площині задані точки:

$$p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_2), \dots, p_n(x_n, y_n)$$

и треба апроксимувати їх деякою лінією, що проходить через них (у вказаному порядку!) або недалеко від них.

Введемо параметр t , значення якого $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ (наприклад, можна взяти $t_i = i$), і побудуємо дві функції: $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$, які представляють собою параметричний опис кривої, що апроксимує дані точки. Для цього нам треба тим чи іншим способом апроксимувати два набори даних: (t_i, x_i) и (t_i, y_i) , а потім сумістити результати, виключивши параметр t .

Приклад 2. Параметрична інтерполяція – для заданих табличних функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ побудувати наближення за допомогою сплайна (крива проходить через вузлові точки).

Нижче наведено текст відповідного М-файла, результати роботи якого відображені на рис. 2.

```
% Приклад 2
t = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
x = [2 3 3 2 1 -1 -1 -2 -2 0];
y = [1 2 3 4 4 3 2 1 0 2];

% Проміжні точки для інтерполяції
tt = [t(1):0.01:t(length(t))];

% Інтерполяція сплайном
% параметрично заданої функції
sx = spline(t, x);
sy = spline(t, y);
xx = ppval(sx, tt);
yy = ppval(sy, tt);
hold on;

line1=plot(xx, yy, x, y, 'o')
set(line1, 'linewidth', 1.5);
title...
('Параметрична інтерполяція функції', ...
 'FontName', 'Courier', 'FontSize', 13)
set(gca, 'FontSize', 11);
```

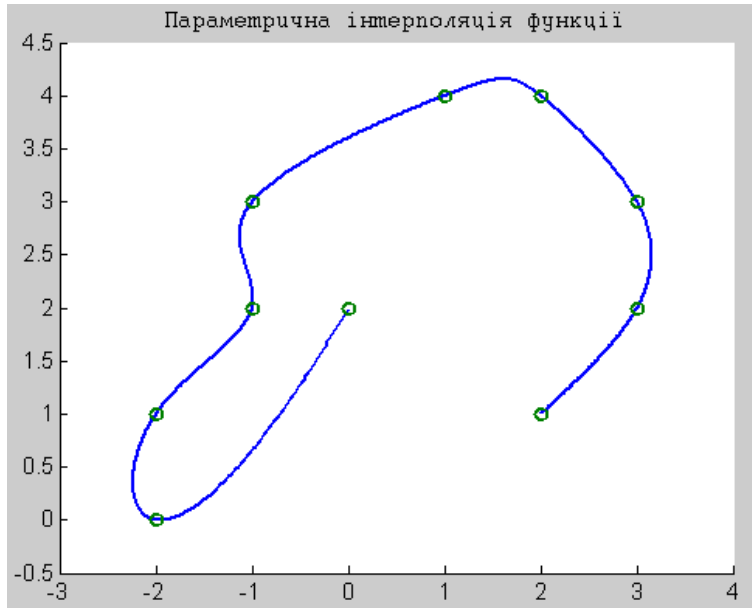


Рис. 2. Параметрична інтерполяція сплайном

Простір сплайнів. Позначимо :

- $S_{m,q}(\Delta_{[a,b]})$ – множина усіх сплайнів степеня $m > 0$ дефекту q на сітці $\Delta_{[a,b]}$.
- $x_+^k = \begin{cases} x^k, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, k = 1, 2, \dots \end{cases}$

Очевидно, що $x_+^k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$.

Мають місце:

Лема 2.1 $S_{m,q}(\Delta_{[a,b]})$ – лінійний простір.

Теорема 2.1 Система функцій

$$\begin{cases} x^\alpha, & \alpha = 0, 1, \dots, m, \\ (x - X_i)_+^\beta, & \beta = m - q + 1, m - q + 2, \dots, m, i = 1, \dots, n - 1 \end{cases}$$

лінійно незалежна та утворює базис у $S_{m,q}(\Delta_{[a,b]})$ [2].

Побудова інтерполяційного сплайна $S_{0,1}(x;u)$. Враховуючи, що $S_{0,1}(x;u)$ – кусково-стала функція, для якої не виконуються умови (2.2), необхідно визначитись із однозначністю цієї функції на $\Delta_{[a,b]}$. Для цього достатньо перевизначити відрізки сітки таким чином $\Delta_i = [X_i, \overline{X_{i+1}})$, тоді маємо представлення

$$S_{0,1}(x;u) = a_i = y_i, x \in \Delta_i, i = 1, n - 1; S_{0,1}(b;u) = y_n. \quad (2.7)$$

Функція $S_{0,1}(x;u)$ використовується при розв'язанні відповідних прикладних задач. Як і інші сплайн-функції, кусково-стала функція буде використовуватися в наступних розділах.

Побудова інтерполяційного лінійного сплайна. Враховуючи, що для інтерполяційного сплайна (ІС) першого порядку виконуються умови (2.1)–(2.3), дефект лінійного сплайна буде дорівнювати одиниці. Для ІС $S_{1,1}(x;u), x \in \Delta_{[a,b]}$ будемо використовувати наступне “сплайнове” зображення

$$S_{1,1}(x;u) = a_i(x - X_i) + b_i, x \in \Delta_i, i = 1, \dots, n - 1. \quad (2.8)$$

Система (2.8) визначається коефіцієнтами $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{n-1}$, кількість яких дорівнює $2(n-1)$. Для їх знаходження скористаємося зображенням (2.8) і умовами (2.2), (2.3). В результаті отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} b_i = y_i, & i = 1, \dots, n - 1, \\ a_{n-1}h_{n-1} + b_{n-1} = y_n, & i = n, \\ a_{i-1}h_{i-1} + b_{i-1} = b_i, & i = 2, \dots, n - 1 \end{cases}$$

з кількістю рівнянь $2(n-1)$. Її розв'язок легко знаходиться в явній (алгебраїчній) формі:

$$\begin{cases} b_i = y_i, \\ a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{h_i} \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{X_{i+1} - X_i} \equiv y(X_i; X_{i+1}), & i = 1, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Тут ми формально позначили $b_n = y_n$, а також використали стандартне позначення $y(X_i; X_{i+1})$ для *поділених різниць першого порядку* [3, с.385]. В подальшому, для скорочення запису, будемо позначати $y_{i,i+1} = y(X_i; X_{i+1})$.

Зауважимо, що подання одних коефіцієнтів (a_i) за допомогою інших (b_i) є типовим при побудові сплайнів.

Досить часто, при застосуванні сплайн-функцій, необхідно представити ІС на відрізку $[X_i, X_{i+1}]$ сітки у формі “лагранжіана”

$$S_{1,1}(x; u) = y_i \rho_{i,1}(x) + y_{i+1} \rho_{i,2}(x), \quad x \in \Delta_i, \quad (2.10)$$

$$\rho_{i,1}(x) = (X_{i+1} - x)h_i^{-1}; \quad \rho_{i,2}(x) = (x - X_i)h_i^{-1}.$$

Якщо ввести позначення

$$t = (x - X_i)h_i^{-1}, \quad x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0,1], \quad (2.11)$$

то сплайн (2.10) набуває вигляду

$$S_{1,1}(x; u) = y_i \psi_1(t) + y_{i+1} \psi_2(t);$$

$$x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0,1]; \quad (2.12)$$

$$\psi_1(t) = 1-t, \quad \psi_2(t) = t.$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Написати М-функцію $spl0_v(X, u, T)$ – обчислення в точках T ІС порядку 0.
2. Виконати завдання 1 аудиторної роботи з теми 1 для $n=3, 9, 15$, використовуючи $spl0_v(X, u, T)$.
3. Виконати завдання 2 аудиторної роботи з теми 1 для $n=3, 9, 15$, використовуючи $spl0_v(X, u, T)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати М-функцію $spl1_v(X, u, T)$ – обчислення в точках T ІС порядку 1.
2. Написати М-функцію $spl1p_v(X, u, T, type)$ – обчислення в точках T ІС порядку 1 або/і його похідної. $type$ – параметр, який

приймає наступні значення: 1 – обчислюється сплайн; 2 – обчислюється похідна сплайна; 3 – обчислюється сплайн та його похідна.

3. Написати М-функцію $[x, S] = spl1(X, u)$ – побудова лінійного ІС.
4. Написати М-файл для тестування $spl1_v(X, u, T)$.
5. Написати М-файл для тестування $spl1p_v(X, u, T, type)$.
6. Написати М-файл для тестування $spl1(X, u)$.
7. Виконати завдання 1 аудиторної роботи з теми 1 для $n=3, 9, 15$, використовуючи $spl1(X, u)$.
8. Виконати завдання 2 аудиторної роботи з теми 1 для $n=3, 9, 15$, використовуючи $spl1(X, u)$.

Тема №3

ВБУДОВАНІ ФУНКЦІЇ МАТЛАВ ДЛЯ РОБОТИ ІЗ СПЛАЙНАМИ ТА ЇХ СИНТАКСИС

Як зазначалося вище, підвищення якості апроксимації табличних даних можна досягти за допомогою сплайнів – поліномів невисокого (звичайно, 3-го) степеня, які наближають дані не глобально, тобто не на всьому заданому інтервалі, а окремо на кожному частковому інтервалі між сусідніми вузлами. При цьому у вузлах повинна бути забезпечена стиківка – співпадіння значень (графік сплайна проходить через вузли), співпадіння похідних (відсутність зламів), іноді співпадіння других похідних. Можуть також задаватися крайові умови на кінцях інтервалу, наприклад – перетворення в нуль другої похідної.

Для такого роду кусково-поліноміальної апроксимації табличних функцій $y(x)$ призначена функція *interp1* ('I' – цифра):

$$yy = \text{interp1}(x, y, xx, \text{method});$$

Тут:

- x – абсциси функції, що апроксимується;
- y – ординати функції, що апроксимується;
- xx – абсциси точок, в яких обчислюються значення апроксимуючих поліномів, які повертаються у вигляді вектора yy ;
- *method* – спосіб апроксимації, що задається у вигляді рядка символів (насправді достатньо вказати лише перший символ).

Параметр *method* може приймати одне з наступних значень:

- '*nearest*' – інтерполяція по сусіднім точкам, при якій значення у довільній точці дорівнює значенню у найближчій вузловій точці (апроксимація кусковими поліномами нульового степеня (сходінками): для довільного проміжного значення xx знаходиться найближче табличне x_i і за yy приймається відповідне табличне значення y_i);
- '*linear*' – лінійна інтерполяція (апроксимація ламаними – кусковими поліномами 1-го степеня);

- '*spline*' – кубічний сплайн (апроксимація сплайнами – кусковими поліномами 3-го степеня);
- '*pchip*' або '*cubic*' – апроксимація кусковими поліномами Ерміта 3-го степеня.

Якщо параметр *method* опущений, за замовчуванням використовується '*linear*'.

При апроксимації за методом '*spline*' у вузлових точках неперервні перша і друга похідні, а у внутрішніх вузлах, сусідніх з кінцевими, неперервна також і третя похідна.

При використанні метода '*pchip*' друга похідна може мати розриви. Сплайн, побудований за методом '*pchip*', є монотонним на довільній ділянці, на якій монотонні дані, цей сплайн відтворює локальні екстремуми даних.

Для гладких даних переважним є метод '*spline*', для негладких краще застосовувати метод '*pchip*'.

Приклад 3. Нехай функція $y=y(x)$ задана таблично у 6 точках на відрізьку [0.43, 0.75]. Виконати сплайн-інтерполяцію даної функції.

Нижче наведено текст відповідного М-файла розв'язання задачі за допомогою функції *interp1* і візуалізацію результатів (рис. 3):

```
% Приклад 3
clc
x=[0.43 0.48 0.55 0.62 0.7 0.75];
y=[1.635997 1.73234 1.87686...
   2.03345 2.35973 2.48321];
axes('NextPlot','Add');
plot(x,y,'Color','r','LineWidth',1);
xlabel('X'); ylabel('Y');
n=length(x);
t=[0.512 0.608 0.702];
xi=[x(1):0.02:x(length(x))];
yin=interp1(x,y,xi,'nearest');
plot(xi,yin,'-','LineWidth',1);
yil=interp1(x,y,xi,'linear');
plot(xi,yil,':','LineWidth',2);
```

```

yis=interp1(x,y,xi, 'spline');
plot(xi,yis,'--','LineWidth', 2);
ytn= interp1(x,y,t, 'nearest');
plot(t,ytn,'O','LineWidth', 2);
ytl= interp1(x,y,t, 'linear');
plot(t,ytl,'X','MarkerSize', 10,...
'LineWidth', 2);
yts= interp1(x,y,t, 'spline');
plot(t,yts,'S','MarkerSize', 10,...
'LineWidth', 2);
legend('функція','nearest','linear',...
'spline','Location','Best');

```

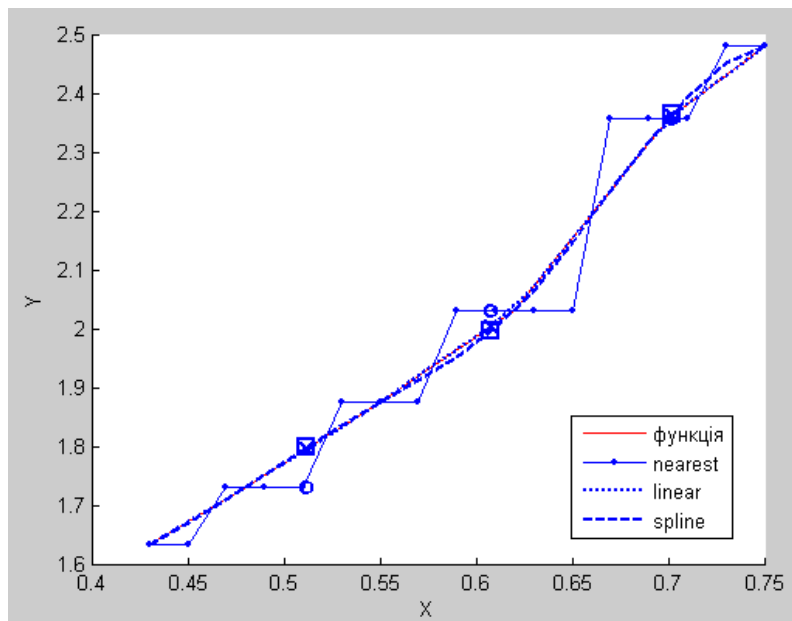


Рис. 3. Графіки функції $y=u(x)$ та її наближень за допомогою сплайнів

Назви методів *'spline'* і *'pchip'* є іменами функцій, до яких звертається функція *interp1* (інші два методи *'nearest'* і *'linear'* опрацьовуються безпосередньо в *interp1*). Звернення до цих функцій має два різних формати:

1) $y_u = \text{spline}(x,y,xx)$ і $y_{pp} = \text{pchip}(x,y,xx)$
2) $pp = \text{spline}(x,y)$ і $pp = \text{pchip}(x,y)$

У першому варіанті вхідні і вихідні параметри мають той самий зміст, що і при зверненні до *interp1*.

Приклад 4. Функція $y=\sin(x)$ задана таблично у 8 точках на відрізку $[0, 2\pi]$. Виконати сплайн-інтерполяцію даної функції.

Нижче наведено текст відповідного М-файла задачі.

```

% Приклад 4
clc
N=8;
% 1. Завдання табличних значень
% інтерпольованої функції в т. x(i)
i=1:N;
dx=2*pi/(N-1); % крок дискретизації в таблиці
x(i)=dx*(i-1);
y=sin(x);

% 2. Завдання значень абсцис точок,
% в яких обчислюються значення
% інтерполяційного полінома
M=1000;
j=1:M;
dx=2*pi/(M-1);
X(j)=dx*(j-1);

% 3. Обчислення інтерпольованих значень
% функції Y у вузлах сітки X
Y=spline(x,y,X);

% 4. Візуалізація результатів інтерполяції
plot(x,y, 'o', X, Y);...
xlabel('X'); ylabel('Y'); grid on;

%5. Обчислення похибки між точними і
% інтерпольованими значеннями

```

```

% обчислення точних значень
% інтерпольованої функції
Y_t=sin(X);
% побудова нового графіка з білим тлом
figure1 = figure ('Color', [1 1 1]);
plot (X, abs (Y_t-Y));
xlabel ('X'); ylabel ('Y');
title ('Абсолютна похибка');
grid on;

```

В результаті отримуємо графіки функції $y=\sin(x)$ з візуалізацією результатів інтерполяції (рис. 4) і похибки між точними і інтерпольованими значеннями (рис. 5).

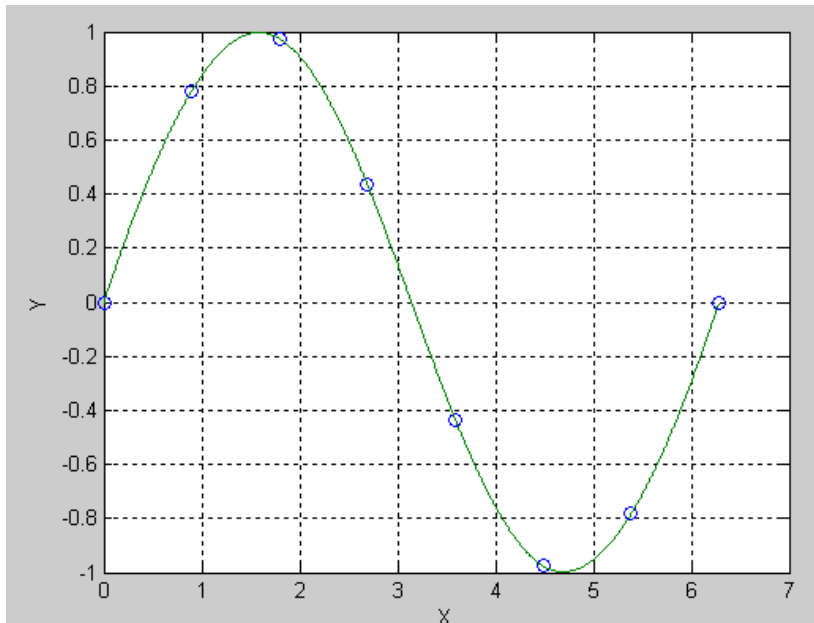


Рис. 4. Графік функції $y=\sin(x)$ із значеннями інтерполяційного полінома

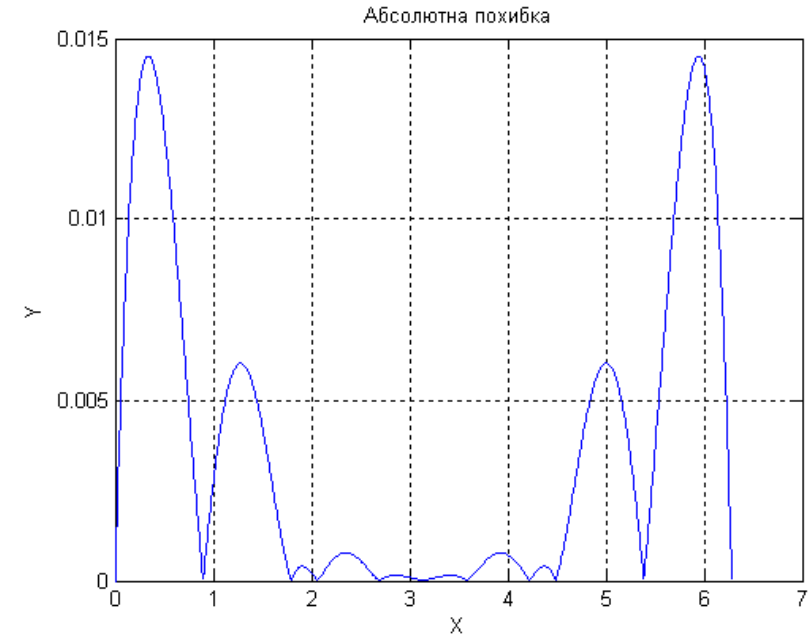


Рис. 5. Похибка інтерполяції

Похибка на краях відрізка істотно вище, ніж у його середині. Це пояснюється тим, що у функції *spline*, яка використовується у даному прикладі, не враховуються крайові умови.

Приклад 5. Побудувати сплайн-інтерполяцію для функції Рунге.

Нижче наведено текст відповідного М-файла задачі і візуалізація результату (рис. 6).

```

% Приклад 5
% Побудова для функції Рунге
% інтерполяції сплайнами
% Введемо функцію Рунге
f = inline('1./(1+25*x.^2)');
% Обчислення таблиці значень
x = linspace(-1, 1, 10);
y = f(x);

```

```

% Обчислення сплайн-інтерполяції
xx = linspace(-1, 1, 100);
yy = spline(x, y, xx);
% Побудова графіків
axes('NextPlot', 'Add');
plot(x, y, 'LineWidth', 2);
% Червоним на графіку - апроксимація,
% напівжирним - інтерпольована функція.
plot(xx, yy, 'Color', 'r');

```

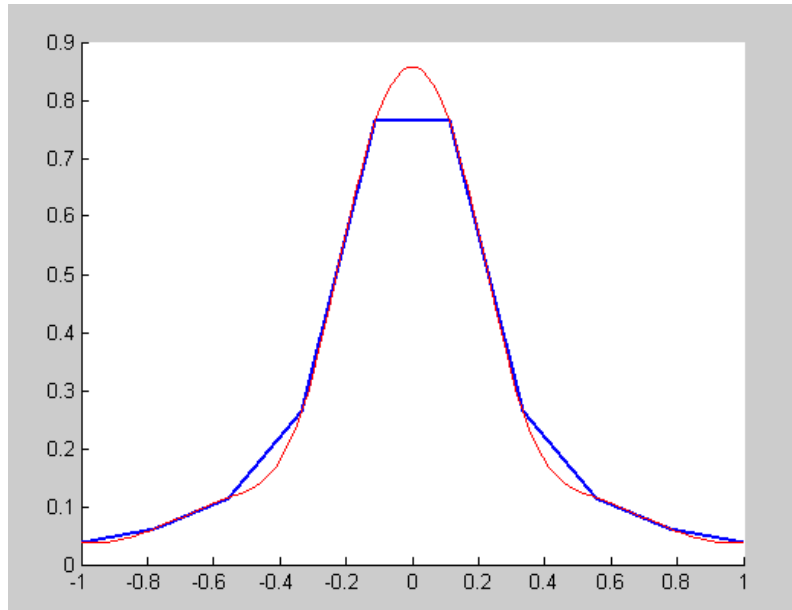


Рис. 6. Сплайн-інтерполяція функції Рунге

У другому варіанті обидві функції повертають так звану кусково-поліноміальну форму (ppform, piecewise polynomial form) – спеціальний внутрішній формат MATLAB для представлення сплайнів. Структура, яку повертають вказані функції, містить декілька полів, з яких основними є два – *pp.breaks* і *pp.coefs*.

Значенням поля *breaks* є вектор *x*. Поле *coefs* є матрицею, кожний рядок якої містить коефіцієнти поліномів 3-го степеня,

що апроксимують дані на окремих ділянках:

- перший рядок – на ділянці від *breaks* (1) до *breaks* (2);
- другий рядок – на ділянці від *breaks* (2) до *breaks* (3);
- і т. д.

Наприклад, функція, задана таблицею значень

$x = -3:3$;

$y = [-1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$;

була опрацьована функцією *spline*, і коефіцієнти отриманих поліномів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Інтервал по x	Коефіцієнти	Поліном
$[-3, -2]$	0.25 -0.75 0.5 -1	$0.25x^3 - 0.75x^2 + 0.5x - 1$
$[-2, -1]$	0.25 0 -0.25 -1	$0.25x^3 - 0.25x - 1$
$[-1, 0]$	-0.25 0.75 0.5 -1	$-0.25x^3 + 0.75x^2 + 0.5x - 1$
$[0, 1]$	-0.25 0 1.25 0	$-0.25x^3 + 1.25x$
$[1, 2]$	0.25 -0.75 0.5 1	$0.25x^3 - 0.75x^2 + 0.5x + 1$
$[2, 3]$	0.25 0 -0.25 1	$0.25x^3 - 0.25x + 1$

Зауважимо, що старші коефіцієнти поліномів першої і другої ділянок співпадають (також співпадають і старші коефіцієнти поліномів останньої і передостанньої ділянок). Це є наслідком того, що третя похідна неперервна у вузлах, сусідніх з крайніми.

Обчислення значення сплайна в довільній точці *xx* здійснюється наступним способом.

Спочатку визначається *i* – номер інтервалу між сусідніми значеннями *breaks*, якому належить ця точка. Наприклад, для $xx = -2.5$ буде $i=1$ (для точки $xx = -3.5$, що лежить зліва від області визначення сплайна, також береться $i=1$). Потім знаходиться $t = xx - breaks(i)$ і обчислюється значення відповідного полінома (в даному випадку $0.25t^3 - 0.75t^2 + 0.5t - 1$).

Приклад 6. Обчислити значення сплайна в точці з використанням кусково-поліноміальної форми представлення сплайнів.

Нижче наведено текст відповідного М-файла і результати його виконання з візуалізацією (рис. 7).

```
% Приклад 6
clc
x=-3:3;
y=[-1 -1 -1 0 1 1 1];
plot(x,y,'o');
axis([-3.5,3.5,-1.5,1.5]);
pp=spline(x,y)
uzly=pp.breaks
koeff=pp.coefs
xx=-2.5
yy1=spline(x,y,xx)
t=xx-pp.breaks(1)
yy3=pp.coefs(1,1)*t^3+pp.coefs(1,2)*t^2+...
    pp.coefs(1,3)*t+pp.coefs(1,4)
% -----
```

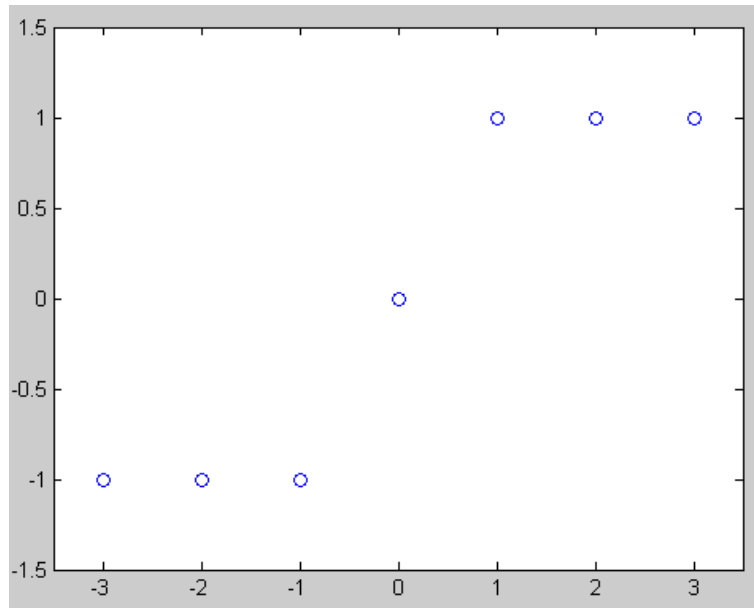


Рис. 7. Графік функції, заданої таблицею значень

```
pp =
    form: 'pp'
    breaks: [-3 -2 -1 0 1 2 3]
    coefs: [6x4 double]
    pieces: 6
    order: 4
    dim: 1
uzly =
    -3    -2    -1     0     1     2     3
koeff =
    0.2500   -0.7500    0.5000   -1.0000
    0.2500         0   -0.2500   -1.0000
   -0.2500    0.7500    0.5000   -1.0000
   -0.2500         0    1.2500         0
    0.2500   -0.7500    0.5000    1.0000
    0.2500    0.0000   -0.2500    1.0000
xx =
   -2.5000
yy1 =
   -0.9063
t =
    0.5000
yy2 =
   -0.9063
```

Обговоримо детальніше зміст кусково-поліноміальної форми сплайна та її подання структурою *pp*, яку повертає функція *csape*. Структура *pp* має такі поля:

- *form* – форма сплайна (значення 'pp' свідчить про те, що сплайн подається в кусково-поліноміальній формі);
- *breaks* – вектор точок розбиття (у даному випадку 7 точок розбиття [-3 -2 -1 0 1 2 3], отже сплайн складається з 6 поліноміальних частин);
- *coefs* – масив коефіцієнтів сплайна, кожний рядок якого містить коефіцієнти поліноміальних частин (у даному випадку масив 6x4, так як, на кожному з 6 відрізків поліном 3 степеня визначається 4 коефіцієнтами);

- *pieces* – кількість поліномів, що складають сплайн (у даному випадку 6);
- *order* – порядок сплайна (у даному випадку 4, так як порядок дорівнює степеню плюс 1, тобто, числу коефіцієнтів поліномів).
- *dim* – розмірність (у даному випадку 1).

Структури, в полях яких зберігаються знайдені коефіцієнти, можуть задаватися як аргументи при зверненні до функції *ppval* для обчислення значень апроксимуючих функцій у формі $yy=ppval(pp,xx)$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Використовуючи вбудовану функцію MATLAB *spline*, розглянути приклад Н. С. Бернштейна для значень послідовностей П, наприклад, при $n=3, 9, 15$. Інтерполянти і функцію розмістити: а) на одному графіку всі одночасно; б) послідовно для кожного значення n .

2. Виконати завдання 1 для $n=4, 10, 16$.

3. Використовуючи вбудовану функцію MATLAB *spline*, розглянути приклад К. Рунге для значень послідовностей П, наприклад, при $n=3, 9, 15$. Інтерполянти і функцію розмістити: а) на одному графіку всі одночасно; б) послідовно для кожного значення n .

4. Виконати завдання 3 для $n=4, 10, 16$.

Завдання для самостійної роботи

1. Виконати завдання 1 аудиторної роботи для $n=201$, використовуючи вбудовану функцію MATLAB *spline*.

2. Виконати завдання 3 аудиторної роботи для $n=201$, використовуючи вбудовану функцію MATLAB *spline*.

Тема №4 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КВАДРАТИЧНОГО СПЛАЙНА

Враховуючи, що для сплайна другого порядку повинна виконуватись умова (2.2) з гладкістю до похідної включно, то дефект квадратичного сплайна буде 1.

Спочатку побудуємо квадратичний ІС, наслідуючи попередню схему побудови (за означеннями 2.1–2.2).

Для ІС $S_{2,1}(x;u), x \in \Delta_{[a,b]}$, будемо використовувати наступне “сплайнове” зображення

$$S_{2,1}(x;u) = a_i(x - X_i)^2 + b_i(x - X_i) + c_i, \quad (4.1)$$

$$x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Система (4.1) визначається коефіцієнтами $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^{n-1}$, кількість яких дорівнює $3(n-1)$. Для їх визначення використаємо:

1) умову інтерполяції (2.3), що дає систему $(n-1)+1$ рівнянь

$$\begin{cases} c_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ a_{n-1}h_{n-1}^2 + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1} = y_n, \quad i = n, \end{cases} \quad (4.2)$$

2) умову гладкості сплайна (2.2) в усіх внутрішніх вузлах сітки

$$S_{3,1}^{(p)}(X_i - 0; u) = S_{3,1}^{(p)}(X_i + 0; u), \quad p = 0, 1, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

що дає систему $2(n-2)$ рівнянь

$$\begin{cases} a_i h_i^2 + b_i h_i + c_i = c_{i+1}, \\ 2a_i h_i + b_i = b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (4.3)$$

3) одну додаткову умову, наприклад, значення $u'(a) = A$:

$$S'_{2,1}(a; u) = A. \quad (4.4)$$

Таким чином, з умов 1)–3) отримуємо кількість рівнянь, що дорівнює $n+2(n-2)+1=3(n-1)$. З першого рівняння (4.2) маємо:

$$c_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.5)$$

Об'єднуючи друге рівняння (4.2) і перше рівняння (4.3), а також враховуючи друге рівняння (4.3), отримуємо систему:

$$\begin{cases} a_i h_i^2 + b_i h_i = y_{i+1} - y_i, i = 1, \dots, n-1, \\ 2a_i h_i + b_i = b_{i+1}, i = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (4.6)$$

Розв'язок системи (4.6) можна записати у вигляді наступних рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} b_1 = A, \\ b_i = 2(y_i - y_{i-1})h_{i-1}^{-1} - b_{i-1}, i = 2, \dots, n-1; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} a_i = 0.5(b_{i+1} - b_i)h_i^{-1}, i = 1, \dots, n-2, \\ a_i = ((y_{i+1} - y_i)h_i^{-1} - b_i)h_i^{-1}, i = n-1. \end{cases} \quad (4.8)$$

Подано ІС $S_{2,1}(x; u)$ на відрізку $[X_i, X_{i+1}]$ сітки у формі “лагранжіана”.

Використовуючи позначення (2.11), співвідношення (4.5) і перше рівняння (4.6), сплайн (4.1) можна записати так

$$\begin{aligned} S_{2,1}(x; u) &= b_i h_i \varphi_1(t) + y_i \psi_1(t) + y_{i+1} \psi_2(t), \\ x \in \Delta_i, i &= 1, \dots, n-1, t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\varphi_1(t) = -t^2 + t; \quad \psi_1(t) = -t^2 + 1; \quad \psi_2(t) = t^2.$$

Зауваження.

1. Представлення $S_{2,1}(x; u)$ у формі (4.9) задає квадратичний сплайн через “визначаючий” коефіцієнт b_i (або через значення $S'_{2,1}(X_i; u)$, яке часто позначають m_i) і значення інтерпольованої функції в граничних точках відрізка Δ_i .

2. Таке представлення зручно використовувати при застосуванні квадратичного сплайна, наприклад, до розв'язання інтегральних рівнянь, числового диференціювання та інтегрування.

3. При отриманні форми (4.9) не використовувалась неперервність першої похідної сплайна у внутрішніх вузлах сітки. Використання цих умов приводить до знаходження “визначаючих” коефіцієнтів b_i – системи (4.7).

Така побудова може бути використана для незначної кількості вузлів сітки $\Delta_{[a,b]}$ (для подальших посилань назвемо цю схему побудови “сітка інтерполяції = сітка сплайна”). В загальному випадку, як показано в [4], розглянута побудова має серйозні недоліки, а саме:

- ✓ при деяких, наприклад, періодичних крайових умовах, $S_{2,1}(x; u)$ не завжди існує [4, с.21];
- ✓ для розглянутого алгоритму (4.2) – (4.8) маємо один вільний параметр i , віддаючи перевагу одному з кінців відрізка $[a, b]$, можна отримати нестійкий обчислювальний процес отримання коефіцієнтів сплайна (розрахункові формули (4.7), (4.8)), що приведе до накопичення похибки і тим самим до осциляції отриманого сплайна;
- ✓ розглянуті вище проблеми носять загальний характер для інтерполяційних сплайнів парних степенів, які будуються на сітці $\Delta_{[a,b]}$ [4–6].

Виправити цю ситуацію можна введенням двох сіток:

- ✓ сітка з вузлами сплайна;
- ✓ сітка з вузлами інтерполяції.

Для сітки з вузлами інтерполяції ми залишимо позначення $\Delta_{[a,b]}$. Сітку з вузлами сплайна позначимо $\delta_{[a,b]}$ і визначимо таким чином [6]

$$\begin{aligned} a &= x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b; \\ X_{i-1} &< x_i < X_i, i = 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\delta_i = [x_i, x_{i+1}], \quad \delta_{[a,b]} = \bigcup_{i=1}^n \delta_i.$$

Найчастіше вузли сплайна вибирають посередині вузлів інтерполяції [6; 7]:

$$\begin{aligned} x_i &= 0.5(X_{i-1} + X_i) = X_{i-1} + 0.5h_{i-1} = \\ &= X_i - 0.5h_{i-1}, i = 2, \dots, n; \\ x_1 &= X_1; \quad x_{n+1} = X_n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Надалі будемо використовувати сплайнову сітку $\delta_{[a,b]}$, визначену (4.10), (4.11), і інтерполяційну сітку $\Delta_{[a,b]}$, визначену (1.1), (1.2).

Означення 4.1 Функція $S_{2,1}(x;u)$, $x \in [a,b]$ називається *інтерполяційним сплайном степеня 2 дефекту 1*, якщо вона

а) на кожному відрізку δ_i , $i = 1, \dots, n$ є поліномом степеня 2

$$S_{2,1}(x;u) = a_i(x - X_i)^2 + b_i(x - X_i) + c_i, \quad (4.12)$$

$$x \in \delta_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

б) неперервна на $[a,b]$ разом із своєю похідною

$$S_{2,1}(x;u) \in C^1([a,b]); \quad (4.13)$$

в) інтерполює функцію $u(x)$ у вузлах сітки $\Delta_{[a,b]}$

$$S_{2,1}(X_i;u) = y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Число невідомих коефіцієнтів в (4.12) $3n$, а умови (4.13), (4.14) дають $2(n-1)+n$ рівнянь. Залишається до визначити ще 2 додаткові умови. Найчастіше використовують наступні додаткові умови [4] (*типи крайових умов для квадратичного сплайна*):

$$\text{I. } S'_{2,1}(a;u) = A, \quad S'_{2,1}(b;u) = B; \quad (4.15)$$

$$\text{II. } S''_{2,1}(a;u) = A, \quad S''_{2,1}(b;u) = B; \quad (4.16)$$

$$\text{III. } S_{2,1}^{(p)}(a;u) = S_{2,1}^{(p)}(b;u), \quad p = 1, 2; \quad (4.17)$$

$$\text{IV. } S''_{2,1}(x_j + 0;u) = S''_{2,1}(x_j - 0;u), \quad j = 2, n. \quad (4.18)$$

Зауваження.

1. Крайові умови III типу використовують у випадку, коли функція $u(x)$ періодична з періодом $b-a$.

2. Якщо функція $u(x)$ відома (задана аналітично), то для визначення A, B знаходимо значення відповідних похідних:

$$A = u'(a), \quad B = u'(b) \quad \text{при умові I типу};$$

$$A = u''(a), \quad B = u''(b) \quad \text{при умові II типу}.$$

3. У випадку дискретного завдання функції $\{u(X_i)\}_{i=1}^n = \{Y_i\}_{i=1}^n$, значення A, B для умов I-II типу відсутні. Тому на практиці можна скористатися наближеним обчисленням відповідних по-

хідних, зокрема багатоточковими різницевиими формулами. Досить часто використовують при цьому нульові умови II типу, що відповідає вільно відпущеним кінцям лекала. Але найкраще скористатись крайовими умовами IV типу [4].

4. Форма (4.12) представлення квадратичного сплайна показує, що функція $S''_{2,1}(x;u)$ є кусково-сталою на відрізку δ_i і вузли сплайна можна використовувати для врахування властивостей функції $u(x)$, що наближується, – опуклість, точки перегину [4].

Розглянемо основні варіанти побудови параболічного ІС для типів крайових умов I-IV.

Алгоритм 2м. Вибір коефіцієнтів b_i в якості “визначаючих” відповідає представленню коефіцієнтів сплайна (4.12) через значення першої похідної сплайна $m_i = S'_{2,1}(X_i;u)$, $i = 1, \dots, n$.

Враховуючи представлення сплайна у формі (4.12) і умови інтерполяції (4.14), знаходимо

$$S_{2,1}(X_i;u) \equiv c_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.19)$$

Запишемо умови неперервності функції $S_{2,1}(x;u)$ у внутрішніх точках сітки $\delta_{[a,b]}$:

$$y_{i-1} + m_{i-1}(x_i - X_{i-1}) + a_{i-1}(x_i - X_{i-1})^2 =$$

$$= y_i + m_i(x_i - X_i) + a_i(x_i - X_i)^2;$$

$$m_{i-1} + 2a_{i-1}(x_i - X_{i-1}) = m_i + 2a_i(x_i - X_i),$$

$$i = 2, \dots, n.$$

Виконаємо перетворення в цих рівняннях, отримаємо наступні співвідношення

$$a_{i-1} - a_i = 2h_{i-1}^{-1}(2y_{i-1,i} - (m_{i-1} + m_i)), \quad (4.20)$$

$$a_{i-1} + a_i = m_{i-1,i},$$

звідки маємо

$$\begin{cases} a_1 = h_1^{-1}(2y_{1,2} - 0.5(3m_1 + m_2)), \\ a_i = h_{i-1}^{-1}(0.5(m_{i-1} + 3m_i) - 2y_{i-1,i}), i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.21)$$

Використовуючи друге співвідношення (4.20) і знайдене значення a_i , отримаємо наступну систему для $\{m_i\}_{i=1}^n$:

$$h_{i-1}^{-1}(0.5(m_{i-1} + 3m_i) - 2y_{i-1;i}) + h_i^{-1}(0.5(m_i + 3m_{i+1}) - 2y_{i;i+1}) = m_{i;i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Виконуючи нескладні перетворення, маємо:

$$\begin{cases} h_i m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_{i-1}m_{i+1} = 4(h_i y_{i-1;i} + h_{i-1} y_{i;i+1}), \\ i = 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4.22)$$

До отриманої системи додамо дві крайові умови I–IV типу, записані за допомогою m_i .

Тип I. Рівняння (4.15) і система (4.22) дають замкнену СЛАР

$$\begin{cases} m_1 = A, \\ (4.22), i = 2, \dots, n-1, \\ m_n = B. \end{cases} \quad (4.23)$$

Тип II. Враховуючи (4.21), рівняння (4.16) мають наступний вигляд

$$2a_1 = A, \quad 2a_n = B,$$

і маємо таку замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 3m_1 + m_2 = 4y_{1;2} - h_1 A, \\ (4.22), i = 2, \dots, n-1, \\ m_{n-1} + 3m_n = 4y_{n-1;n} + h_{n-1} B. \end{cases} \quad (4.24)$$

Тип III. Враховуючи періодичність інтерпольованої функції

$$y_1 = y_n, \quad y_2 = y_{n+1}, \quad h_1 = h_n, \quad m_1 = m_n, \quad m_2 = m_{n+1}$$

і співвідношення (4.22) для $i = 2, n$, отримаємо замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 3(h_1 + h_2)m_2 + h_1 m_3 + h_2 m_n = 4(h_2 y_{1;2} + h_1 y_{2;3}), \\ (4.22), i = 3, \dots, n-1, \\ h_{n-1} m_2 + h_1 m_{n-1} + 3(h_{n-1} + h_1)m_n = 4(h_1 y_{n-1;n} + h_{n-1} y_{1;2}). \end{cases} \quad (4.25)$$

Після розв'язання (4.25) потрібно покласти $m_1 = m_n$.

Тип IV. Рівняння (4.18) мають наступний вигляд

$$2a_1 = 2a_2, \quad 2a_{n-1} = 2a_n.$$

Підставимо в ці рівняння відповідні значення (4.21) і остаточно отримаємо замкнену СЛАР:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 2y_{1;2}, \\ (4.22), i = 2, \dots, n-1, \\ m_{n-1} + m_n = 2y_{n-1;n}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Таким чином, для кожного типу крайових умов сплайна знаходимо коефіцієнти $\{m_i\}_{i=1}^n$ як розв'язок відповідної СЛАР, а потім визначаємо $\{a_i, c_i\}_{i=1}^n$ за формулами (4.21), (4.19).

Аналізуючи матриці отриманих СЛАР (4.23), (4.24), (4.26), приходимо до висновку, що вони є матрицями тридіагональної структури з діагональною перевагою, з чого випливає, що існує єдиний розв'язок систем, який можна знайти за допомогою стійкої *монотонної прогонки* [8, с.73-80]. Випадок III типу крайових умов зводиться до двох СЛАР з тридіагональною матрицею з діагональною перевагою, і єдиний розв'язок (4.25) можна знайти за допомогою стійкої *циклічної прогонки* [8, с.86-90]. Таким чином, на відміну від побудови квадратичного ІС за схемою “сітка інтерполяції = сітка сплайна”, **Алгоритм 2м** гарантує стійкість процесу інтерпольовання і існування сплайна.

Алгоритм 2М. Вибір коефіцієнтів a_i в якості “визначаючих” відповідає знаходженню коефіцієнтів сплайна (4.12) через значення другої похідної сплайна $a_i = 0.5M_i$, $M_i = S_{2,1}''(X_i; u)$.

Представимо $\phi(x) = S_{2,1}(x; u)$ у вигляді

$$\phi(x) = \phi(a) + \phi'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)\phi''(t)dt. \quad (4.27)$$

Будемо вимагати щоб

$$\phi(X_{i-1}; X_i; X_{i+1}) = y_{i-1;i;i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Знайдемо поділені різниці першого порядку, які фігурують в лівій частині цього рівняння, враховуючи, що $\phi''(t) = M_i, t \in \delta_i$:

$$\begin{aligned}\phi(X_i; X_{i+1}) &= \phi'(X_i) + \frac{M_i \int_{X_i}^{x_{i+1}} (X_{i+1} - t) dt + M_{i+1} \int_{x_{i+1}}^{X_{i+1}} (X_{i+1} - t) dt}{X_{i+1} - X_i} = \\ &= \phi'(X_i) + \frac{1}{8} (X_{i+1} - X_i) (3M_i + M_{i+1}); \\ \phi(X_{i-1}; X_i) &= \phi'(X_i) - \frac{1}{8} (X_i - X_{i-1}) (M_{i-1} + 3M_i).\end{aligned}$$

Після цього обчислимо поділену різницю другого порядку:

$$\begin{aligned}\phi(X_{i-1}; X_i; X_{i+1}) &= \frac{1}{8} \left[\frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i+1} - X_{i-1}} M_{i-1} + 3M_i + \frac{X_{i+1} - X_i}{X_{i+1} - X_{i-1}} M_{i+1} \right] = \\ &= y(X_{i-1}; X_i; X_{i+1}), \quad i = 2, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Якщо позначити $\tilde{h}_i = h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)^{-1}$; $\tilde{\tilde{h}}_i = 1 - \tilde{h}_i$, то отримаємо наступні рівняння:

$$\tilde{h}_i M_{i-1} + 3M_i + \tilde{\tilde{h}}_i M_{i+1} = 8y(X_{i-1}; X_i; X_{i+1}), \quad (4.28)$$

$$i = 2, \dots, n-1.$$

До отриманої системи додамо дві крайові умови типу I-IV, записані за допомогою M_i .

Тип I. Враховуючи представлення $S_{2,1}(x; u)$ у вигляді (4.27), для відрізка $[x_1, X_2] = [X_1, x_2] \cup [x_2, X_2]$ маємо

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(X_1) + A(x - X_1) + \\ &+ M_1 \int_{X_1}^{x_2} (x - t) dt + M_2 \int_{x_2}^x (x - t) dt.\end{aligned}$$

Обчислюємо $\phi(x) = S_{2,1}(x; u)$ в точці $x = X_2$ з урахуванням, що $\phi(X_2) = y_2, \phi(X_1) = y_1$, знаходимо інтеграли і отримуємо крайову умову (4.15) на лівому кінці відрізка $[a, b]$

$$2h_1(A - y_{1,2}) = M_1((X_2 - x_2)^2 - (X_2 - X_1)^2) - M_2(X_2 - x_2)^2.$$

Аналогічно, на $[X_{n-1}, X_n] = [X_{n-1}, x_n] \cup [x_n, X_n]$ використовуємо представлення $S_{2,1}(x; u)$ в формі (4.27)

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(X_n) + B(x - X_n) + \\ &+ M_n \int_{X_n}^{x_n} (x - t) dt + M_{n-1} \int_{x_n}^x (x - t) dt\end{aligned}$$

і, виконуючи підстановку $x = X_{n-1}$, обчислення інтегралів, отримуємо крайову умову (4.15) на правому кінці відрізка $[a, b]$. Отже рівняння (4.15) і система (4.28) дають замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 3M_1 + M_2 = 8h_1^{-1}(y_{1,2} - A), \\ (4.28), i = 2, \dots, n-1, \\ M_{n-1} + 3M_n = -8h_{n-1}^{-1}(y_{n-1;n} - B). \end{cases} \quad (4.29)$$

Тип II. Умови (4.16) в термінах введених позначень мають вигляд

$$M_1 = A, \quad M_n = B,$$

а отже отримуємо таку замкнену СЛАР

$$\begin{cases} M_1 = A, \\ (4.28), i = 2, \dots, n-1, \\ M_n = B. \end{cases} \quad (4.30)$$

Тип III. Враховуючи періодичність інтерпольованої функції $y_1 = y_n, y_2 = y_{n+1}, h_1 = h_n, M_1 = M_n, M_2 = M_{n+1}$ і співвідношення (4.27) для $i = 2, n$, отримаємо замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 3M_2 + \tilde{\tilde{h}}_2 M_3 + \tilde{h}_2 M_n = 8y(X_1; X_2; X_3), \\ (4.28), i = 3, \dots, n-1, \\ \tilde{\tilde{h}}_n M_2 + \tilde{h}_n M_{n-1} + 3M_n = 8y(X_{n-1}; X_n; X_{n+1}). \end{cases} \quad (4.31)$$

Після розв'язання (4.31) потрібно покласти $M_1 = M_n$.

Тип IV. Рівняння (4.18) мають наступний вигляд

$$M_1 = M_2, \quad M_{n-1} = M_n,$$

а отже отримуємо замкнену СЛАР

$$\begin{cases} -M_1 + M_2 = 0, \\ (4.28), i = 2, \dots, n-1, \\ M_{n-1} - M_n = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Таким чином, для кожного типу крайових умов сплайна знаходимо коефіцієнти $\{M_i\}_{i=1}^n$ як розв'язок відповідної СЛАР.

Аналізуючи матриці отриманих СЛАР (4.29), (4.30), (4.32), приходимо до висновку, що вони є матрицями тридіагональної структури з діагональною перевагою, з чого випливає, що існує єдиний розв'язок систем, який можна знайти за допомогою стійкої *монотонної прогонки* [8, с.73–80]. Випадок III типу крайових умов зводиться до двох СЛАР з тридіагональною матрицею з діагональною перевагою, і єдиний розв'язок (4.31) можна знайти за допомогою стійкої *циклічної прогонки* [8, с.86–90]. Таким чином Алгоритм 2М також гарантує стійкість процесу інтерполювання і існування сплайна.

Після визначення $\{M_i\}_{i=1}^n$ потрібно знайти розрахункові формули $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^n$. Зрозуміло, що

$$a_i = 0.5M_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.33)$$

А з умови інтерполювання (4.14) знаходимо, що

$$c_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.34)$$

Враховуючи умови неперервності (4.13)

$$\begin{aligned} 0.5M_{i-1}(x_i - X_{i-1})^2 + b_{i-1}(x_i - X_{i-1}) + y_{i-1} &= \\ = 0.5M_i(x_i - X_i)^2 + b_i(x_i - X_i) + y_i, \\ M_{i-1}(x_i - X_{i-1}) + b_{i-1} &= M_i(x_i - X_i) + b_i, \\ i &= 2, \dots, n, \end{aligned}$$

отримаємо формули для обчислення b_i :

$$\begin{cases} b_1 = y_{1,2} - \frac{1}{8}h_1(3M_1 + M_2); \\ b_i = y_{i-1,i} + \frac{1}{8}h_{i-1}(M_{i-1} + 3M_i), \quad i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.35)$$

Зауваження.

1. Побудову квадратичного інтерполяційного сплайна у випадку загального розташування вузлів сплайна (без урахування (4.11)) наведено в [4].
2. Отримані розрахункові формули побудови сплайна $S_{2,1}(x; u)$ в Алгоритмах 2m, 2M суттєво спрощуються при рівномірному кроці інтерполяційної сітки і виконанні (4.11) (див. [4–6]).
3. Як вказано в [4], представлення квадратичних сплайнів в термінах m_i краще ніж в термінах M_i , так як праві частини системи обчислення M_i чутливіші до похибки обчислення інтерпольованої функції.
4. Квадратичний сплайн, в залежності від подальшого використання, можна будувати і в інших формах [4], наприклад

$$S_{2,1}(x; u) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad x \in \delta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

і отримати для нього розрахункові формули в термінах представлення коефіцієнтів через значення першої похідної сплайна $m_i = S'_{2,1}(x_i; u)$, $i = 1, \dots, n+1$ [6, с. 17,].

Приклад 7. Побудова параболічного сплайна. Дано фрагмент таблиці значень функції:

x	-1	0	1
y	1.5	0.5	2.5

Необхідно побудувати параболічний сплайн дефекту 1.

Так як будується сплайн $S_{2,1}(x)$, то він буде представлений двома поліномами 2-го степеня:

$$S_{2,1}(x) = \begin{cases} P_{1,1}(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2, & x \in [X_1, X_2], \\ P_{1,2}(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2, & x \in [X_2, X_3] \end{cases}$$

Функція $S_{2,1}(x)$ повинна задовольняти умови:

$$S_{2,1}(X_i) = y_i, i = 1, 2, 3 \text{ – інтерполяції;}$$

$$P_{1,1}(X_2) = P_{1,2}(X_2); P'_{1,1}(X_2) = P'_{1,2}(X_2) \text{ – гладкість у внутрішній}$$

точці сітки до першої похідної включно.

Таким чином, отримали 5 умов для знаходження 6 невідомих. Ще одна умова додатково накладаються на сплайн в граничній точці X_1 або в точці X_3 .

Візьмемо, наприклад, додаткову граничну умову такого вигляду $S'_2(X_1) = 0$. Тоді отримаємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = 1.5, \\ a_1 = 0.5, \\ a_2 = 0.5, \\ a_2 + b_2 + c_2 = 2.5, \\ b_1 = b_2, \\ b_1 - 2c_1 = 0. \end{cases}$$

Ця система легко розв'язується:

$$a_1 = 0.5, b_1 = -2, c_1 = -1, a_2 = 0.5, b_2 = -2, c_2 = 4.$$

$$\text{Таким чином, } S_{2,1}(x) = \begin{cases} 0.5 - 2x - x^2, x \in [-1, 0], \\ 0.5 - 2x + 4x^2, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Нижче наведено текст відповідного М-файла і результати його виконання з візуалізацією (рис. 8).

```
% Приклад 7
syms p x
N=3;
xx=[-1 0 1];
xi1=-1:0.01:0;
xi2=0:0.01:1;
y=[1.5 0.5 2.5];
```

```
A=[1 xx(1) xx(1)^2 0 0 0;
1 xx(2) xx(2)^2 0 0 0;
0 0 0 1 xx(2) xx(2)^2;
0 0 0 1 xx(3) xx(3)^2;
0 1 2*xx(2) 0 -1 -2*xx(2);
0 1 2*xx(1) 0 0 0];
```

```
B=[y(1); y(2); y(2); y(3); 0; 0];
```

```
d=A\B
```

```
P1=[d(3) d(2) d(1)]
```

```
yi1=polyval(P1,xi1);
```

```
P2=[d(6) d(5) d(4)]
```

```
yi2=polyval(P2,xi2);
```

```
p1=d(3)*x^2+d(2)*x+d(1)
```

```
p2=d(6)*x^2+d(5)*x+d(4)
```

```
plot(xi1,yi1,xi2,yi2,'--','Linewidth',1.5);
```

```
legend('P1,1','P1,2','Location','Best')
```

```
d =
```

```
0.5000
```

```
-2.0000
```

```
-1.0000
```

```
0.5000
```

```
-2.0000
```

```
4.0000
```

```
P1 =
```

```
-1.0000 -2.0000 0.5000
```

```
P2 =
```

```
4.0000 -2.0000 0.5000
```

```
p1 =
```

```
-x^2-2*x+1/2
```

$$p2 = 4x^2 - 2x + 1/2$$

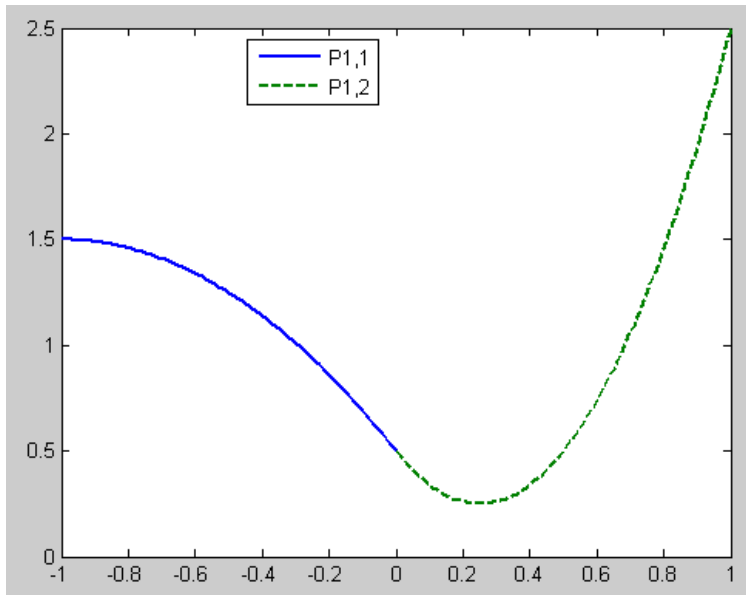


Рис. 8. Параболічний сплайн

Завдання для аудиторної роботи

1. Написати М-функцію $spl2a_v(X,u,T,A)$ – обчислення в точках T ІС порядку 2, де A – значення $u'(a)$.
2. Написати М-функцію $[x,S]=spl2a(X,u,A)$ – побудова квадратичного ІС, де A – значення $u'(a)$.
3. Написати М-функцію $spl2b_v(X,u,T,B)$ – обчислення в точках T ІС порядку 2, де B – значення $u'(b)$.
4. Написати М-функцію $[x,S]=spl2b(X,u,B)$ – побудова квадратичного ІС, де B – значення $u'(b)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати М-файл для тестування $spl2a_v(X,u,T,A)$.
2. Написати М-файл для тестування $spl2a(X,u,T,A)$.
3. Написати М-файл для тестування $spl2b_v(X,u,T,B)$.
4. Написати М-файл для тестування $spl2b_v(X,u,T,B)$.
5. Знайти представлення квадратичного ІС у формі “лагранжіана” через значення $\{m_i, y_i\}$ з урахуванням Алгоритму 2м.
6. Знайти представлення квадратичного ІС у формі “лагранжіана” через значення $\{M_i, y_i\}$ з урахуванням Алгоритму 2М.
7. Написати М-функцію $[x,S,m]=spl2I(X,u,type,A,B)$ – побудова квадратичного ІС за Алгоритмом 2м.
8. Написати М-функцію $spl2I_v(X,u,T,type,A,B)$ – обчислення в точках T квадратичного ІС за Алгоритмом 2м.
9. Написати М-функцію $[x,S,M]=spl22(X,u,type,A,B)$ – побудова квадратичного ІС за Алгоритмом 2М.
10. Написати М-функцію $spl22_v(X,u,T,type,A,B)$ – обчислення в точках T квадратичного ІС за Алгоритмом 2М.
11. Написати М-файл для тестування $spl2I(X,u,type,A,B)$.
12. Написати М-файл для тестування $spl2I_v(X,u,T,type,A,B)$.
13. Написати М-файл для тестування $spl22(X,u,type,A,B)$.
14. Написати М-файл для тестування $spl2I_v(X,u,T,type,A,B)$.

Тема №5

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КУБІЧНОГО СПЛАЙНА

Враховуючи, що для сплайна третього порядку повинна виконуватись умова (2.2) з гладкістю до другої похідної включно, дефект кубічного сплайна буде дорівнювати 1.

Для ІС $S_{3,1}(x;u), x \in \Delta_{[a,b]}$ будемо використовувати наступне “сплайнове” зображення

$$S_{3,1}(x;u) = a_i(x - X_i)^3 + b_i(x - X_i)^2 + c_i(x - X_i) + d_i, \quad (5.1)$$

$$x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Зауваження.

1. Легко пересвідчитись про зміст коефіцієнтів у (5.1):

$$d_i = S_{3,1}(X_i;u), c_i = S'_{3,1}(X_i;u), b_i = \frac{1}{2}S''_{3,1}(X_i;u), a_i = \frac{1}{6}S'''_{3,1}(X_i;u).$$

2. Цей зміст може враховуватися при записі сплайна [2, с.141].

Система (5.1) визначається коефіцієнтами $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i=1}^{n-1}$, кількість яких дорівнює $4(n-1)$.

Для їх визначення використаємо:

1) умову інтерполяції (2.3), що дає систему $(n-1)+1$ рівнянь

$$\begin{cases} d_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ a_{n-1}h_{n-1}^3 + b_{n-1}h_{n-1}^2 + c_{n-1}h_{n-1} + d_{n-1} = y_n, \quad i = n, \end{cases} \quad (5.2)$$

2) умови гладкості сплайна (2.2) в усіх внутрішніх вузлах сітки

$$S_{3,1}^{(p)}(X_i - 0;u) = S_{3,1}^{(p)}(X_i + 0;u), \quad p = 0, 1, 2, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

що дає систему $3(n-2)$ рівнянь

$$a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = d_{i+1}, \quad (5.3)$$

$$3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i = c_{i+1}, \quad (5.4)$$

$$6a_i h_i + 2b_i = 2b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (5.5)$$

3) 2 додаткові умови, необхідні для утворення замкненої системи рівнянь. Найчастіше використовують наступні додаткові умови [4; 9] (типи крайових умов для кубічного сплайна):

$$I. S'_{3,1}(a;u) = A, \quad S'_{3,1}(b;u) = B; \quad (5.6)$$

$$II. S''_{3,1}(a;u) = A, \quad S''_{3,1}(b;u) = B; \quad (5.7)$$

$$III. S_{3,1}^{(p)}(a;u) = S_{3,1}^{(p)}(b;u), \quad p = 1, 2; \quad (5.8)$$

$$IV. S'''_{3,1}(X_j + 0;u) = S'''_{3,1}(X_j - 0;u), \quad j = 2, n-1. \quad (5.9)$$

Зауваження.

1. Мають місце всі зауваження, які сформулювались при постановці крайових умов для квадратичного інтерполяційного сплайна за схемою сітка “інтерполяції = сітка сплайна”.

2. Звичайно, крім умов I–IV типу, можна використовувати й інші додаткові умови, наприклад, $S''_{3,1}(a;u) = A, S'_{3,1}(b;u) = B$, які є частинним випадком умов загального типу

$$\lambda_1 S''_{3,1}(a;u) + \gamma_1 S'_{3,1}(a;u) = A, \quad \lambda_2 S''_{3,1}(b;u) + \gamma_2 S'_{3,1}(b;u) = B.$$

Отриману СЛАР з рівнянь (5.3)–(5.5) і двох додаткових умов можна чисельно розв'язати відповідним прямим чи ітераційним алгоритмом. Але такий підхід неекономний з огляду кількості операцій, використання оперативної пам'яті комп'ютера, а також не містить інформації про існування та єдиність сплайна. Тому використовують алгоритми побудови сплайна (знаходження коефіцієнтів), в яких вказані недоліки відсутні.

Конструктивно такі алгоритми ґрунтуються на формі запису і порядку обчислення коефіцієнтів.

Алгоритм 3м. Представимо сплайн у формі “лагранжіана” через значення першої похідної сплайна $m_i = S'_{3,1}(X_i;u)$ і інтерпольованої функції в граничних точках відрізка Δ_i :

$$S_{3,1}(x;u) = m_i h_i \varphi_1(t) + m_{i+1} h_i \varphi_2(t) + y_i \psi_1(t) + y_{i+1} \psi_2(t), \quad (5.10)$$

$$x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, 1],$$

де функції $\varphi_j(t), \psi_j(t), j = 1, 2$ визначаються наступним чином [9, с.101], [5, с.97],

$$\varphi_1(t) = t(1-t)^2, \quad \varphi_2(t) = -t^2(1-t),$$

$$\psi_1(t) = (1-t)^2(1+2t), \quad \psi_2(t) = t^2(3-2t).$$

Кубічний сплайн, представлений у формі (5.10), є неперервним разом із своєю першою похідною скрізь на $[a, b]$. Якщо двічі продиференціюємо (1.57) і скористаємося умовою неперервності другої похідної у внутрішніх точках сітки, а також крайовими умовами I-IV типу, то величини m_i визначаються однозначно з відповідної СЛАР [5; 9].

Алгоритм 3М. Представимо сплайн у формі “лагранжіана” через значення другої похідної сплайна $M_i = S''_{3,1}(X_i; u)$, і інтерпольованої функції в граничних точках відрізка Δ_i :

$$S_{3,1}(x; u) = M_i h_i^2 \varphi_1(t) + M_{i+1} h_i^2 \varphi_2(t) + y_i \psi_1(t) + y_{i+1} \psi_2(t), \quad (5.11)$$

$$x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, 1].$$

Знайдемо явний вигляд функцій $\varphi_j(t), \psi_j(t), j = 1, 2$. Враховуючи, що $S''_{3,1}(x; u)$ лінійна функція на $x \in \Delta_i$, то представимо її у вигляді

$$S''_{3,1}(x; u) = M_i \frac{X_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - X_i}{h_i}, \quad x \in \Delta_i.$$

Після подвійного інтегрування цього виразу, маємо:

$$S_{3,1}(x; u) = (6h_i)^{-1} (M_i (X_{i+1} - x)^3 + M_{i+1} (x - X_i)^3) + A_i (X_{i+1} - x) + B_i (x - X_i),$$

де A_i, B_i деякі константи інтегрування. Так як сплайн інтерполяційний, то в точках X_i, X_{i+1} відомі значення

$$y_i = M_i \frac{h_i^2}{6} + A_i h_i, \quad y_{i+1} = M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + B_i h_i.$$

Підставимо значення A_i, B_i , і з урахуванням позначення (2.11), отримаємо

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{6} t(1-t)(2-t), \quad \varphi_2(t) = -\frac{1}{6} t(1-t)(1+t),$$

$$\psi_1(t) = 1-t, \quad \psi_2(t) = t.$$

Кубічний сплайн, отриманий у вигляді (5.11), є неперервним разом зі своєю другою похідною скрізь на $[a, b]$. Якщо продифе-

ренціюємо (5.11) і скористаємося умовою неперервності першої похідної у внутрішніх точках сітки, а також крайовими умовами I-IV типу, то величини M_i визначаються однозначно з відповідної СЛАР [5].

Алгоритм 3с. Вибір коефіцієнтів c_i в якості “визначаючих”.

Розглянемо в цьому випадку отримання СЛАР з урахуванням крайових умов I-IV типу безпосередньо, використовуючи в певній послідовності рівняння (5.3)–(5.9).

Враховуючи системи рівнянь (5.3), (5.4), отримаємо

$$a_i h_i^3 + b_i h_i^2 = -c_i h_i + y_{i+1} - y_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

а співвідношення (4.13) перепишемо у наступній формі

$$3a_i h_i^3 + 2b_i h_i^2 = h_i (c_{i+1} - c_i),$$

З цих рівнянь знайдемо

$$a_i h_i^3 = h_i (c_{i+1} + c_i) - 2(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.12)$$

$$b_i h_i^2 = -h_i (c_{i+1} + 2c_i) + 3(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.13)$$

Підставимо ці значення в рівняння (4.14) і отримаємо систему, яка містить тільки невідомі $\{c_i\}_{i=1}^n$:

$$h_{i-1}^{-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1}^{-1} + h_i^{-1}) c_i + h_i^{-1} c_{i+1} = 3(h_{i-1}^{-1} y_{i-1,i} + h_i^{-1} y_{i,i+1}),$$

$$i = 2, \dots, n-1.$$

Для зменшення похибки обчислень домножимо останнє рівняння на величину $h_{i-1} h_i / (h_{i-1} + h_i)$, введемо позначення

$\tilde{h}_i = h_i / (h_{i-1} + h_i), \tilde{\tilde{h}}_i = 1 - \tilde{h}_i$ і представимо рівняння у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{h}_i c_{i-1} + 2c_i + \tilde{\tilde{h}}_i c_{i+1} = 3(\tilde{h}_i y_{i-1,i} + \tilde{\tilde{h}}_i y_{i,i+1}), \\ i = 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (5.14)$$

До отриманої системи додамо дві крайові умови типу I–IV, записані через коефіцієнти c_i .

Тип I. Рівняння (5.7) і система (5.14) дають замкнену СЛАР

$$\begin{cases} c_1 = A, \\ (5.14), i = 2, \dots, n-1, \\ c_n = B. \end{cases} \quad (5.15)$$

Тип II. Рівняння (1.55) мають наступний вигляд

$$2b_1 = A, \quad 6a_{n-1}h_{n-1} + 2b_{n-1} = B,$$

і враховуючи співвідношення (5.12), (5.13), остаточно маємо замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 3y_{1,2} - 0.5h_1A, \\ (5.14), i = 2, \dots, n-1, \\ c_{n-1} + 2c_n = 3y_{n-1,n} + 0.5h_{n-1}B. \end{cases} \quad (5.16)$$

Тип III. Враховуючи періодичність інтерпольованої функції

$$y_1 = y_n, \quad y_2 = y_{n+1}, \quad h_1 = h_n, \quad c_1 = c_n, \quad b_1 = b_n$$

і співвідношення (1.61) для $i = 2, n$, отримаємо замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 2c_2 + \tilde{h}_2c_3 + \tilde{h}_2c_n = 3(\tilde{h}_2y_{1,2} + \tilde{h}_2y_{2,3}), \\ (5.14), i = 3, \dots, n-1, \\ \tilde{h}_n c_2 + \tilde{h}_n c_{n-1} + 2c_n = 3(\tilde{h}_n y_{n-1,n} + \tilde{h}_n y_{1,2}). \end{cases} \quad (5.17)$$

Тип IV. Рівняння (5.8) мають наступний вигляд

$$a_1 = a_2, \quad a_{n-2} = a_{n-1}.$$

Підставимо в ці рівняння відповідні значення (5.12), позначимо

$\eta = h_1 h_2^{-1}$, $\mu = h_{n-1} h_{n-2}^{-1}$ і отримаємо формули для c_1 , c_n :

$$\begin{cases} c_1 = (\eta^2 - 1)c_2 + \eta^2 c_3 + 2(y_{1,2} - \eta^2 y_{2,3}) \\ c_n = \mu^2 c_{n-2} + (\mu^2 - 1)c_{n-1} + 2(y_{n-1,n} - \mu^2 y_{n-2,n-1}). \end{cases} \quad (5.18)$$

Знайдені значення (5.18) підставимо в (5.14) для $i = 2, n-1$ і враховуючи тотожності

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2(\eta^2 - 1) + 2 &= \eta + 1, & \tilde{h}_2 \eta^2 + \tilde{h}_2 &= \eta, \\ \tilde{h}_{n-1} + \mu^2 \tilde{h}_{n-1} &= \mu, & \tilde{h}_{n-1}(\mu^2 - 1) + 2 &= \mu + 1, \end{aligned}$$

остаточно отримаємо замкнену СЛАР відносно $\{c_i\}_{i=2}^{n-1}$

$$\begin{cases} (\eta + 1)c_2 + \eta c_3 = \tilde{h}_2 y_{1,2} + (2\eta + \tilde{h}_2) y_{2,3}, \\ (5.14), i = 3, \dots, n-2, \\ \mu c_{n-2} + (1 + \mu)c_{n-1} = (2\mu + \tilde{h}_{n-1}) y_{n-2,n-1} + \tilde{h}_{n-1} y_{n-1,n}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Після розв'язання системи (5.19) невідомі c_1 , c_n визначаються алгебраїчно з (5.18).

Таким чином, для кожного типу крайових умов сплайна визначаємо коефіцієнти $\{d_i\}_{i=1}^n$, знаходимо $\{c_i\}_{i=1}^n$ як розв'язок відповідної СЛАР, а потім визначаємо $\{a_i, b_i\}_{i=1}^n$.

Аналізуючи матриці отриманих СЛАР (5.15), (5.16), (5.19), приходимо до висновку, що вони є матрицями тридіагональної структури з діагональною перевагою, з чого випливає, що існує єдиний розв'язок систем, який можна знайти за допомогою стійкої *монотонної прогонки* [8, с.73–80]. Випадок крайових умов III типу зводиться до двох СЛАР з тридіагональною матрицею з діагональною перевагою, і єдиний розв'язок (1.64) можна знайти за допомогою стійкої *циклічної прогонки* [8, с.86–90]. Таким чином сплайн існує, єдиний і стійкість процесу побудови сплайна гарантується.

Алгоритм 3b. Вибір коефіцієнтів b_i в якості “визначаючих”.

З рівняння (5.6) отримаємо

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{3h_i}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (5.20)$$

а з рівнянь (5.3), (5.4), (5.20), можна визначити

$$c_i = y_{i,i+1} - \frac{1}{3}(b_{i+1} + 2b_i)h_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.21)$$

Підставимо (5.20), (5.21) у співвідношення (5.5), далі поділимо його на $h_{i-1} + h_i$ і отримаємо систему, яка містить тільки невідомі $\{b_i\}_{i=1}^n$:

$$\begin{cases} \tilde{h}_i b_{i-1} + 2b_i + \tilde{h}_i b_{i+1} = 3(h_{i-1} + h_i)^{-1}(y_{i;i+1} - y_{i-1;i}), \\ i = 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (5.22)$$

До цієї системи додамо дві крайові умови I–IV типу, записані через коефіцієнти b_i .

Тип I. Рівняння (5.7) і система (5.22) дають замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 2b_1 + b_2 = 3h_1^{-1}(y_{1;2} - A), \\ (5.22), i = 2, \dots, n-1, \\ b_{n-1} + 2b_n = 3h_{n-1}^{-1}(B - y_{n-1;n}). \end{cases} \quad (5.23)$$

Тип II. Рівняння (4.16), (4.31) дають замкнену СЛАР

$$\begin{cases} b_1 = 0.5A, \\ (5.22), i = 2, \dots, n-1, \\ b_n = 0.5B. \end{cases} \quad (5.24)$$

Тип III. Враховуючи періодичність інтерпольованої функції

$$y_1 = y_n, \quad y_2 = y_{n+1}, \quad h_1 = h_n, \quad c_1 = c_n, \quad b_1 = b_n$$

і (5.22) для $i = 2, n$, отримаємо замкнену СЛАР

$$\begin{cases} 2b_2 + \tilde{h}_2 b_3 + \tilde{h}_2 b_n = 3(h_1 + h_2)^{-1}(y_{2;3} - y_{1;2}), \\ (5.22), i = 3, \dots, n-1, \\ \tilde{h}_n b_2 + \tilde{h}_n b_{n-1} + 2b_n = 3(h_{n-1} + h_n)^{-1}(y_{1;2} - y_{n-1;n}). \end{cases} \quad (5.25)$$

Тип IV. Рівняння (5.8) мають наступний вигляд

$$a_1 = a_2, \quad a_{n-2} = a_{n-1}.$$

Підставимо відповідні значення, враховуючи формули (5.20), отримаємо b_1, b_n :

$$\begin{cases} b_1 = (1 + \eta)b_2 - \eta b_3, \\ b_n = -\mu b_{n-2} + (1 + \mu)b_{n-1}. \end{cases} \quad (5.26)$$

Знайдені значення (5.26) підставимо в (5.22) для $i = 2, n-1$, і враховуючи тотожності

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2(\eta + 1) + 2 &= 2 + \eta, & \tilde{h}_2 - \eta \tilde{h}_2 &= 1 - \eta, \\ \tilde{h}_{n-1} - \mu \tilde{h}_{n-1} &= 1 - \mu, & (\mu + 1)\tilde{h}_{n-1} + 2 &= 2 + \mu, \end{aligned}$$

остаточно отримаємо замкнену СЛАР відносно $\{b_i\}_{i=2}^{n-1}$:

$$\begin{cases} (2 + \eta)b_2 + (1 - \eta)b_3 = \frac{3}{h_1 + h_2}(y_{2;3} - y_{1;2}), \\ (5.22), i = 3, \dots, n-2, \\ (1 - \mu)b_{n-2} + (2 + \mu)b_{n-1} = \frac{3}{h_{n-2} + h_{n-1}}(y_{n-1;n} - y_{n-2;n-1}). \end{cases} \quad (5.27)$$

Після розв'язання системи (5.27) невідомі b_1, b_n визначаються алгебраїчно з (5.26).

Таким чином, для кожного типу крайових умов ІС визначаємо коефіцієнти $\{d_i\}_{i=1}^n$, знаходимо $\{b_i\}_{i=1}^n$ як розв'язок відповідної СЛАР, а потім визначаємо $\{a_i, c_i\}_{i=1}^n$.

З урахуванням властивості діагональної переваги матриць СЛАР (5.23)–(5.25), (5.27) існує єдиний розв'язок системи, який знаходимо відповідним методом прогонки, який має обчислювальну стійкість. Отже і для цього алгоритму маємо існування сплайна і стійкість процесу його побудови.

Зауваження.

1. Для обчислення значення $S_{3,1}(z; u)$ необхідно знайти відрізок Δ_k , до якого відноситься z . Враховуючи впорядкованість вузлів сітки $\Delta_{[a,b]}$, пошук можна здійснювати за допомогою бінарного пошуку [10] елемента z в масиві \vec{X} .
2. Якщо за алгоритмом задачі потрібно тільки обчислювати значення $S_{3,1}(\vec{Z}; u)$, то з огляду економії кількості операцій обчислень і пам'яті комп'ютера потрібно дотримуватися наступного сценарію:

- ✓ знайти вектор “визначаючих” коефіцієнтів $(\vec{c} | \vec{b})$;
- ✓ знайти відрізок Δ_k , до якого відноситься поточне $z = Z_j$;

- ✓ знайти за відповідними формулами решту коефіцієнтів $(a_k, b_k, d_k | a_k, c_k, d_k)$ сплайна $S_{3,1}(x; u), x \in \Delta_k$;
- ✓ знайти значення полінома $S_{3,1}(z; u)$ за формулою Горнера.

Приклад 8. Апроксимація кубічними поліномами і поліномами Ерміта.

Нижче наведено текст відповідного М-файла і результати його виконання (рис. 9).

```
% Приклад 8
clc
x=[-2 -1 0 1 2];
y=[0 0 1 0 0];
t=-3.5:.05:3.5;
ps=spline(x,y);
pp=pchip(x,y);
line=plot(x,y,'ko',t,ppval(ps,t),'k:',...
          t,ppval(pp,t),'k-');
set(line,'linewidth',1.5);
h1=legend('дані','spline','pchip',0);
set(h1,'FontName','Courier','FontSize',13);
title('Два сплайни','FontName',...
      'Courier','FontSize',13);
set(gca,'FontSize',11);
xlabel('x'); ylabel('y')
```

Результати, представлені на рис. 10, побудовані наведеною вище програмою для інших табличних даних прикладу 8 – другий і третій рядки програми слід замінити на:

```
x=-3:3;
y=[-1 -1 -1 0 1 1 1];
```

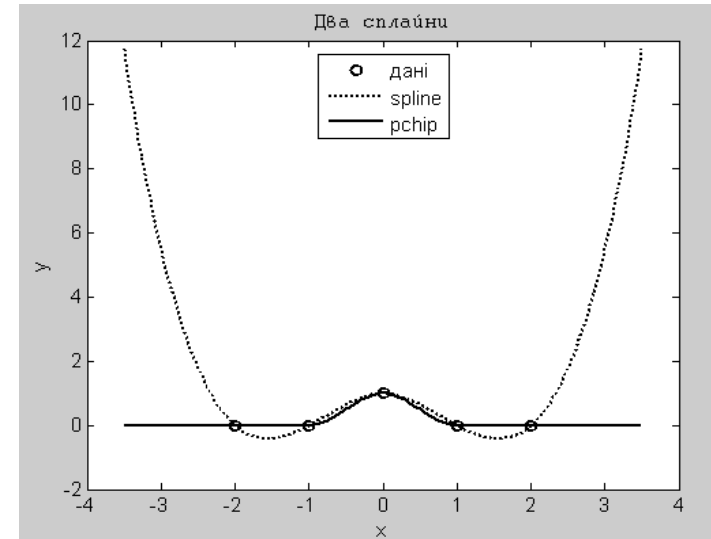


Рис. 9. Апроксимація кубічними поліномами і поліномами Ерміта (перші дані з прикладу 8)

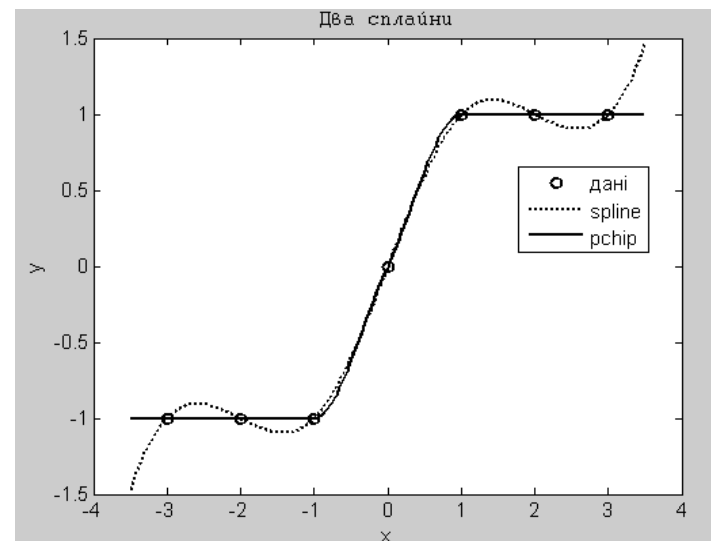


Рис. 10. Апроксимація кубічними поліномами і поліномами Ерміта (другі дані з прикладу 8)

Matlab: сплайни з заданими умовами на кінцях. Скорочена форма звернення до функції, що будує сплайн з заданими умовами на кінцях, має вигляд:

$$pp=csape(x,y)$$

У цьому випадку умови на кінцях у явному вигляді не задаються, за замовчуванням використовуються умови Лагранжа: перші похідні на кінцях такі ж, як і у сплайна, побудованого функцією *spline* за чотирма вузлами, найближчими до відповідного кінця.

Приклад 9. Наблизити функцію $y=\cos(x)$ на відрізьку $[0, 4\pi]$ за допомогою кубічного сплайна.

Нижче наведено текст відповідного М-файла і результати його виконання (рис. 11–15).

```
% Приклад 9
clc
x = 0:pi/2:4*pi;
y = cos(x);
pp = csape(x, y)
figure
fnplt(pp)
hold on
fplot(@cos, [0 4*pi], 'r')
plot(x, y, 'ok')
legend('кубічний сплайн (pp)', ...
       'cos (x)', 'маркер')
pause
C = pp.coefs;
ksi = pp.breaks;

figure
% відображаємо вузлові точки маркерами
plot(x, y, 'ok')
hold all
% відображаємо вертикальні лінії
% у вузлових точках
```

```
plot([x;x], [-1 1], 'k:')

% задаємо відступ від границь підінтервалів
delta = 2;
% у циклі знаходимо значення поліномів і
% виводимо їх графіки

for i = 1:8

    % задаємо значення аргумента
    X = ksi(i)-delta:0.01:ksi(i+1)+delta;

    % знаходимо значення відповідного полінома
    P = polyval(C(i, :), X-ksi(i));

    % виводимо графік полінома
    h = plot(X,P, 'LineWidth',2);

    % під підінтервалом проводимо
    % горизонтальну лінію
    % того ж кольору,
    % що і графік полінома
    plot([ksi(i) ksi(i+1)], [-2 -2],...
         'Color', get(h, 'Color'), 'LineWidth',6)
end
pause

% знаходимо I, II, III похідні сплайна
pp1 = fnder(pp);
pp2 = fnder(pp1); % або pp2 = fnder(pp,2);
pp3 = fnder(pp2); % або pp3 = fnder(pp,3);

figure
% виводимо графік першої похідної
% і вертикальні лінії у вузлових точках
subplot(3, 1, 1)
fnplt(pp1)
hold on
```

```

plot([ksi; ksi], [-1 1], 'k:')

% виводимо графік другої похідної
% і вертикальні лінії у вузлових точках
subplot(3, 1, 2)
fnplt(pp2)
hold on
plot([ksi; ksi], [-1 1], 'k:')

% виводимо графік третьої похідної
% і вертикальні лінії у вузлових точках
subplot(3, 1, 3)
fnplt(pp3)
hold on
plot([ksi; ksi], [-1 1], 'k:')

% обчислення стрибка похідної сплайна
jms3 = fnjmp(pp3, ksi)
pause

% будуємо інтерполяційний поліном, що
% проходить через точки (ksi(1),y(1)),
% (ksi(2),y(2)), (ksi(3),y(3)), (ksi(4),y(4))
p3 = polyfit(ksi(1:4), y(1:4), 3);

% знаходимо значення інтерполяційного полінома
% в точках відрізка [ksi(1)-1.2, ksi(5)]
xi = ksi(1)-1.2:0.01:ksi(5);
yi = polyval(p3, xi);

% будуємо графіки сплайна і полінома
figure
% виводимо графік сплайна
% на відрізку [ksi(1) ksi(5)]
fnplt(pp, [ksi(1) ksi(5)],2)
hold on

% виводимо графік полінома

```

```

% на відрізку [ksi(1)-1.2, ksi(5)]
plot(xi, yi, 'g','Linewidth',2)

% відображаємо маркерами вузлові точки
plot(ksi(1:4), y(1:4), 'ok')
pause

% знаходимо значення похідної полінома
% в точці ksi(1)
p3dx = polyder(p3);
p3slope = polyval(p3dx, ksi(1));

% знаходимо значення похідної сплайна
% в точці ksi(1)
pp1 = fnder(pp);
ppslope = fnval(pp1, ksi(1));

% виводимо різницю значень похідних
% полінома і сплайна в точці ksi(1)
eps=p3slope-ppslope

% визначаємо анонімну функцію
% для дотичної до сплайна в точці ksi(1)
ytangent = @(t) ppslope*(t-x(1))+y(1);

% будуємо графік дотичної
fplot(ytangent, [-1 3], 'k')

% встановлюємо межі осей і
% розташовуємо легенду
set(gca, 'XLim', [ksi(1)-1.2 ksi(4)+0.2],...
        'YLim', [-1.2 1.5])
legend('сплайн', 'поліном', 'маркер',...
        'дотичний вектор')

```

Значення незалежної змінної x задається в рівновіддалених вузлах з кроком $\pi/2$.

В командне вікно виводиться зміст структури *pp*:

```

pp =
  form: 'pp'
 breaks: [0 1.5708 3.1416 4.7124 6.2832
          7.8540 9.4248 10.9956 12.5664]
  coefs: [8x4 double]
 pieces: 8
 order: 4
 dim: 1

```

Порівняння функції і апроксимуючого сплайна здійснюється їх графічним відображенням на одних осях. Для побудови графіка сплайна використано функцію *fnplt*, що входить у Spline Toolbox, для виведення графіка косинуса – функцію *fplot* (рис. 11).

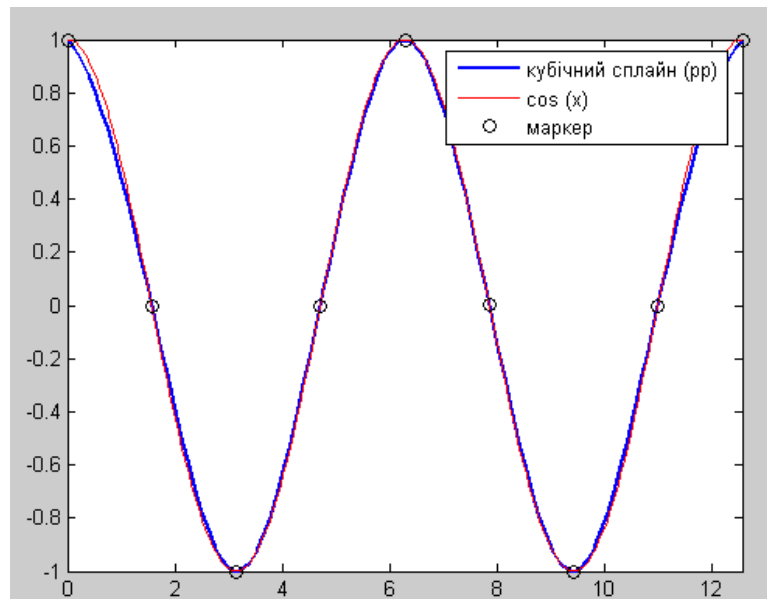


Рис. 11. Апроксимація $\cos(x)$ кубічним сплайном (функція *csape*)

Функція MATLAB *polyval*, що призначена для обчислення значення полінома за заданим вектором його коефіцієнтів, дозволяє легко побудувати поліноми, що складають сплайн. Для

сплайна коефіцієнти поліномів записуються в масив *C*, вузли – в масив *ksi*. На кожній ділянці $[X_i, X_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, 8$ сплайн подається поліномом третього степеня:

$$S_i(x) = C_1(x - X_i)^3 + C_2(x - X_i)^2 + C_3(x - X_i) + C_4$$

Для наочності побудовано графіки кожного з поліномів на ширших відрізках $[X_{i-\tau}, X_{i+1+\tau}]$, де обрано $\tau = 2$. При цьому використано функцію *polyval*, яка за вектором коефіцієнтів полінома знаходить його значення в заданих точках (наприклад, виклик $Y = polyval([-3 \ 1 \ 2 \ 3], -1:0.1:1)$ дозволяє обчислити поліном $-3x^3 + x^2 + 2x + 3$ в точках від -1 до 1 з кроком 0.1). Крім того, відмічено вузлові точки (рис. 12), де кожній ділянці зіставлено колір лінії графіка відповідного полінома).

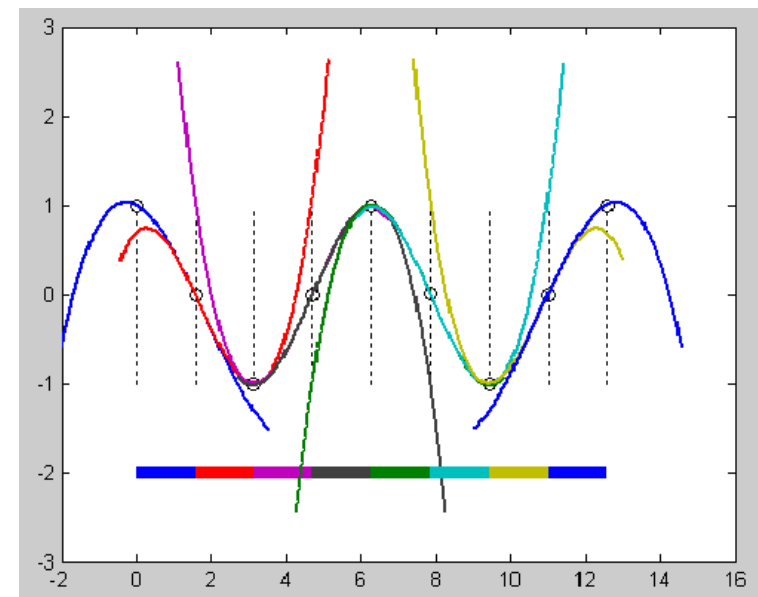


Рис. 12. Поліноми, що утворюють сплайн.

Для того, щоб впевнитися у неперервності першої і другої похідних сплайна побудовано їх графіки (див. верхні два графіки на рис. 13).

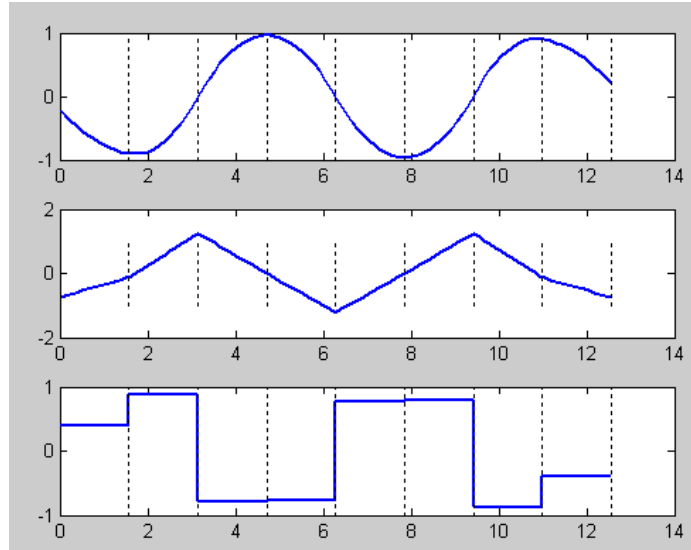


Рис. 13. Перша, друга і третя похідні сплайна.

Похідна сплайна обчислюється за допомогою функції *fnder*, першим входним аргументом якої є структура із сплайном, а обов'язковим другим – порядок похідної (якщо його не вказано, то знаходиться перша похідна). Функція *fnder* повертає структуру, що містить інформацію про похідну сплайна. Третя похідна сплайна є розривною (див. нижній графік на рис. 13).

Неперервність першої і другої похідних сплайна, а також розривність його третьої похідної можна встановити також за допомогою функції *fjtmp*, яка призначена для знаходження стрибків сплайна, наприклад, для третьої похідної отримуємо:

```
0  0.4792  -1.6771  0.0369  1.5296  0.0369  -1.6771
0.4792  0
```

Нульові стрибки в першій і в останній точці розбиття пояснюються тим, що поза базовим відрізком $[X_1, X_9]$ сплайн є відповідним поліномом: першим (для $x < X_1$) і останнім (для $x > X_9$).

Отже, кубічний сплайн і його похідні до другого порядку включно неперервні у внутрішніх точках X_2, \dots, X_8 . Це накладає на сплайн $7 \times 3 = 21$ умов. Ще 9 умов беруться із співпадання сплайна і функції $\cos(x)$ в точках X_1, X_2, \dots, X_9 . Всього, $21+9=30$ умов. Проте, сплайн утворено з 8 поліномів третього степеня. Отже, всього треба визначити $8 \times 4 = 32$ коефіцієнта. Для єдиності сплайна накладаються додаткові (граничні) умови в точках X_1 і X_9 .

За умовчанням, функція *csape* накладає такі граничні умови: значення похідної сплайна в граничній точці співпадає із значенням похідної (єдиного) полінома четвертого порядку (третього степеня), що проходить через дану точку і найближчі три.

У нашому прикладі перша похідна від сплайна в точці X_1 співпадає із значенням похідної кубічного полінома, що проходить через точки X_1, X_2, X_3, X_4 , а похідна в точці X_9 співпадає із значенням похідної кубічного полінома, що проходить через точки X_6, X_7, X_8, X_9 . У цьому неважко переконатися на прикладі лівої границі (рис. 14).

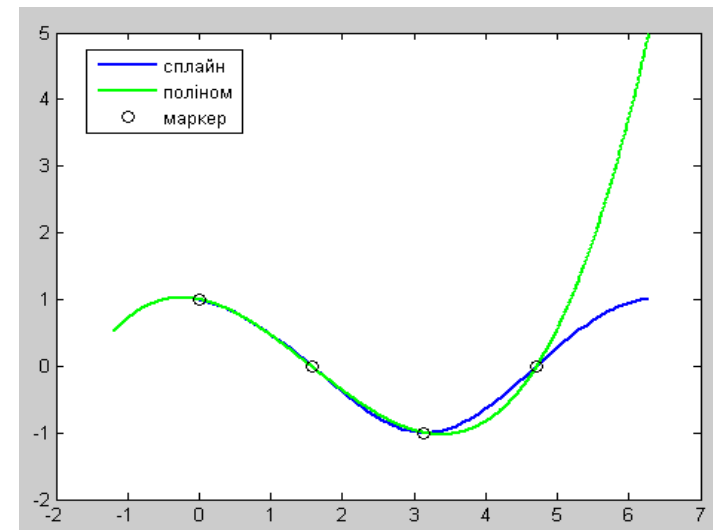


Рис. 14. Сплайн і поліном біля лівої границі

Для побудови полінома, що проходить через деякі точки, використано функцію *polyfit*. Вона повертає коефіцієнти полінома заданого степеня, що наближає дані в сенсі найменших квадратів. Проте, якщо кількість точок рівно на одиницю перевищує степінь, то такий поліном буде як раз інтерполяційним. Для обчислення похідної полінома застосовано функцію *polyder*, яка повертає коефіцієнти полінома, що є похідною вихідного полінома.

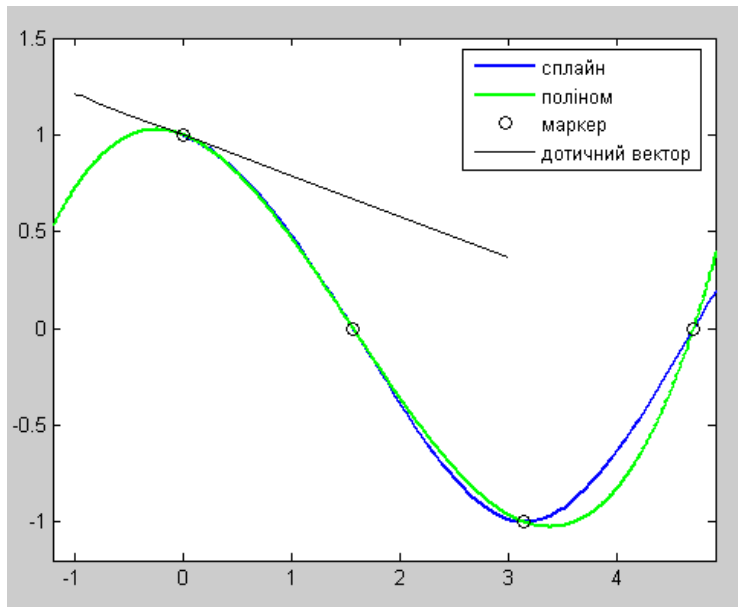


Рис. 15. Граничні умови, що використовує функція *csape* за умовчанням

Далі розглянемо інші типи граничних умов, які дозволяє задавати функція *csape*. Запишемо повну форму звернення до функції

$$pp=csape(x,y,conds,valconds);$$

Тут:

- x і y – дані, що апроксимуються;
- *conds* – тип умов на кінцях, що задається у вигляді рядка

символів (насправді, достатньо задати лише перший символ);

- *valconds* – значення умов, задаються у вигляді вектора $[a,b]$, де a – значення на лівому кінці, b – значення на правому кінці.

Параметр *conds* може приймати одне з наступних значень:

- *'complete'* – побудова сплайна з заданими першими похідними на кінцях (за замовчуванням – умови Лагранжа);
- *'second'* – побудова сплайна з заданими другими похідними на кінцях (за замовчуванням – $[0\ 0]$);
- *'periodic'* – побудова сплайна в кусково-поліноміальній формі з періодичними крайовими умовами (співпадають перша і друга похідні на кінцях), значення параметра *valconds* ігнорується;
- *'not-a-knot'* – побудова сплайна з умовами відсутності вузла (в першому і останньому внутрішніх вузлах неперервна третя похідна, тобто отримується сплайн, який будує функція *spline*), *valconds* ігнорується;
- *'variational'* – побудова природного сплайна в кусково-поліноміальній формі (другі похідні на кінцях дорівнюють нулю), значення параметра *valconds* ігнорується.

Приклад 10. Сплайн з двома видами крайових умов.

Нижче наведено текст відповідного М-файла, що містить програму, яка демонструє деякі з перелічених можливостей: а) задаються перші похідні на кінцях, б) задаються – другі похідні на кінцях. Результати роботи програми відображено на рис. 16.

```
% Приклад 10
clc
x=[-2,-1,0,1,2];
y=[0,0,1,0,0];
plot(x,y,'ko');
xx = [x(1):0.05:x(length(x))];
xlabel('x'); ylabel('y'); hold on
comp=csape(x,y,'complete',[0 0]); % Випадок а)
line2=plot(xx,ppval(comp,xx),'k-');
```



```

set(line2,'linewidth',1.5);
sec=csape(x,y,'second',[0 0]); % Випадок б)
line3=plot(xx,ppval(sec,xx), 'k: ');
set(line3,'linewidth',1.5);
title('Два види крайових умов','FontName',...
      'Courier','FontSize',13)
hL=legend('дані','complete [0 0]',...
         'second [0.0]',0);
set(hL,'FontName','Courier')
set(gca, 'FontSize', 11);

```

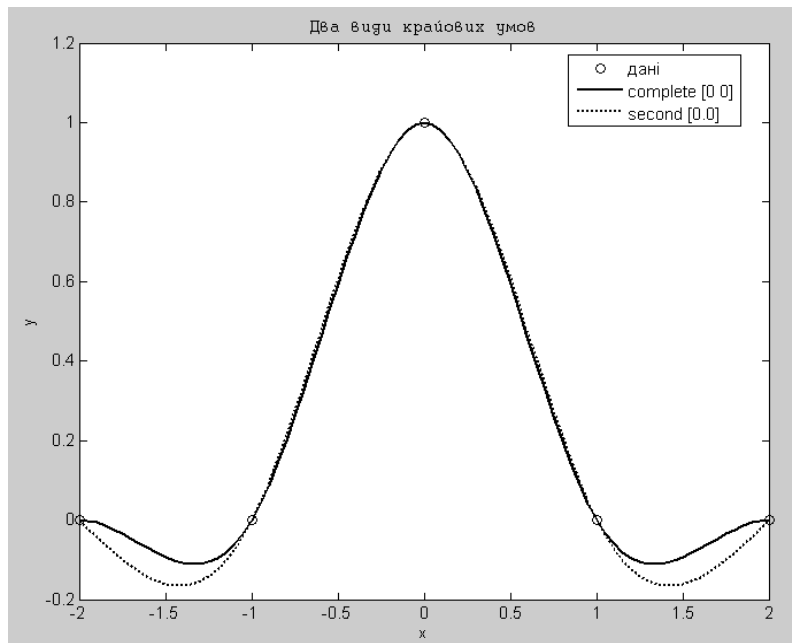


Рис. 16. Апроксимація з умовами на кінцях

Наступний приклад демонструє побудову сплайнів із заданими крайовими умовами і обчислення похідних і стрибків за допомогою функцій *fnder* і *fnjmp* для перевірки отриманих сплайнів.

Приклад 11. Побудувати для функції $y=\sin(x)$ на відрізку $[0, 2\pi]$ періодичний сплайн, сплайн з умовами відсутності вузла і природний сплайн.

```

% Приклад 11
clc
ksi = 0:pi/10:2*pi;
L = length(ksi)-1;
y = sin(ksi);

% Приклад періодичного сплайна:
pp = csape(ksi, y, 'periodic');
pp1 = fnder(pp);
pp2 = fnder(pp, 2);
fnjmp(pp1, ksi(1)) - fnjmp(pp1, ksi(L+1))
fnjmp(pp2, ksi(1)) - fnjmp(pp2, ksi(L+1))

% Приклад сплайна з умовами відсутності вузла:
pp = csape(ksi, y, 'not-a-knot');
pp3 = fnder(pp, 3);
fnjmp(pp3, ksi(2))
fnjmp(pp3, ksi(L))

% Приклад природного сплайна
pp = csape(ksi, y, 'variational');
pp2 = fnder(pp, 2);
fnjmp(pp2, ksi(1))
fnjmp(pp2, ksi(L+1))

```

Умови на кінцях можна задавати у вигляді двокomпонентного вектора $[conds(1) conds(2)]$, складові якого, як правило, приймають два значення:

- 1 – в *valconds* задається значення першої похідної;
- 2 – в *valconds* задається значення другої похідної.

Конкретні значення похідних задаються в *valconds(1)* (на лівому кінці) і в *valconds(2)* (на правому кінці). Завдяки цьому можливе завдання комбінованих умов. Наприклад, команда

```
comb = csape(x,y,[1 2],[0 0])
```

створює кусково-поліноміальну форму сплайна, у якого на лівому кінці дорівнює нулю перша похідна, а на правому – друга (замість [0 0] в *valconds* можна вказати інші довільні значення).

У випадку періодичних умов *conds* задається вектором [0 0] і команди *sp=csape(x, y, 'periodic')* і *sp=csape(x, y, [0 0])* призводять до однакового результату.

Приклад 12. Побудувати для функції, заданої таблично на відрізку[0, 2], сплайн з комбінацією граничних умов.

Нижче наведено текст відповідного М-файла, результати роботи якого відображені на рис. 17.

```
% Приклад 12
clc
x=[-2,-1,0,1,2]
y=[0,0,1,0,0];

plot(x,y,'ko');
xlabel('x'); ylabel('y'); hold on;
xx = [x(1):0.05:x(length(x))];
comb=csape(x,y,[1 2],[0 0]);
line1=plot(xx,ppval(comb,xx),'k-');
set(line1,'linewidth',1.5);

title...
('Комбінація гран. умов:...[1 2],[0 0]',...
 'FontName','Courier','FontSize',13)
hL=legend('дані','сплайн',0);
set(hL,'FontName','Courier');
set(gca,'FontSize',11);
```

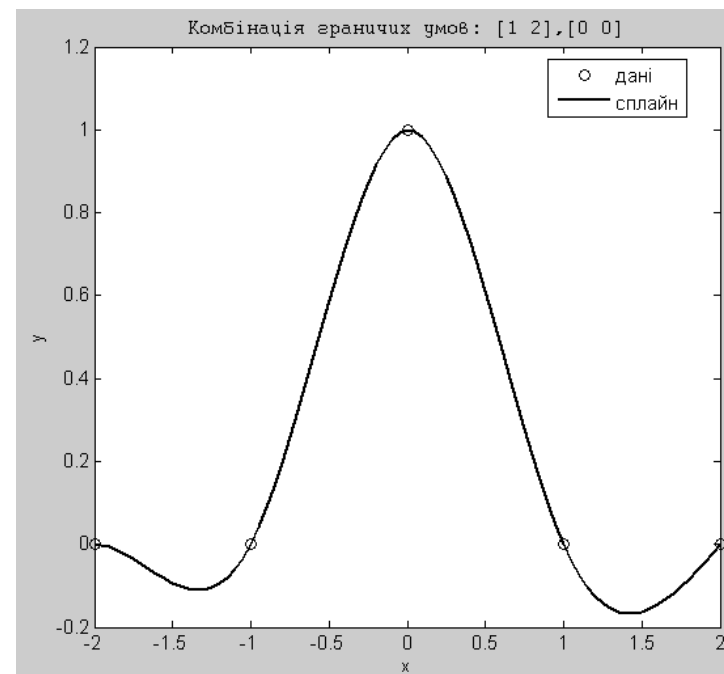


Рис. 17. Апроксимація з комбінованими умовами на кінцях

Matlab: інтерполяція з умовами відсутності вузла (not-a-knot). Умови відсутності вузла (not-a-knot condition) полягають у неперервності третьої похідної сплайна у другому і передостанньому вузлах сітки, тобто на першому і другому відрізках поліном один і той самий. Відповідно на передостанньому і останньому відрізках поліном теж один. Оскільки інтерполяція з умовами відсутності вузла досить широко поширена, то для неї передбачена окрема функція *csapi*, яка буде інтерполяційний сплайн у кусково-поліноміальній формі. Звернення до функції має вигляд:

$$output = csapi(x, y)$$

Виклик функції *csapi* аналогічний відповідному зверненню до функції *csape*:

$pp = csapi(ksi, y)$ і $pp = csape(ksi, y, 'not-a-knot')$ призводять до однакового результату (розглянута вище функція *csape* викликає *csapi*, якщо задані граничні умови відсутності вузла).

Приклад 13. Наблизити функцію $y=\sin(x)$ за допомогою *csape* і *csapi*, знайти різницю отриманих сплайнів і впевнитися, що вона дорівнює нулю.

```
% Приклад 13
ksi = 0:0.1:10;
y = sin(ksi);
% інтерполюємо функцією csapi
ppi = csapi(ksi, y);
% інтерполюємо функцією csape
% з умовами відсутності вузла
ppe = csape(ksi, y, 'not-a-knot');
% знаходимо різницю сплайнів і
% порівнюємо коефіцієнти
pp0 = fncmb(ppi, '-', ppe);
max(max(abs(pp0.coefs)))
```

```
ans =
    0
```

Тут використана функція *fncmb*, що здійснює арифметичні операції над сплайнами.

Звернення $ppi = csapi(ksi, y)$ і $pps = spline(ksi, y)$ призводять до одного й того ж сплайна (з точністю до похибок заокруглення при обчисленнях):

```
pp0 = fncmb(ppi, '-', pps);
max(max(abs(pp0.coefs)))
```

```
ans =
 1.1519e-014
```

Інтерфейс функцій *csapi* і *spline* однаковий, вони вмiють не тільки виводити структуру з інформацією про кусково-поліноміальну форму сплайна, але й значення сплайна в заданих

точках. Для знаходження значень сплайна необхідно викликати *csapi* з третім вхідним аргументом – масивом точок *xx*:

$$yy = csapi(ksi, y, xx)$$

Іноді обчислення значень сплайна в досить великій кількості точок дозволяє побудувати його точніше, ніж, функція *fnplot*, що входить до Spline Toolbox, наприклад:

```
ksi = 0:0.1:10;
y = sin(ksi.^2);
figure
ppi = csapi(ksi, y);
subplot(2,1,1)
fnplt(ppi)
xx = ksi(1):(ksi(end)-ksi(1))/1000:ksi(end);
yy = csapi(ksi, y, xx);
subplot(2,1,2)
plot(xx, yy)
```

призводить до двох графіків одного й того ж сплайна (рис. 18), нижчий з яких є точнішим.

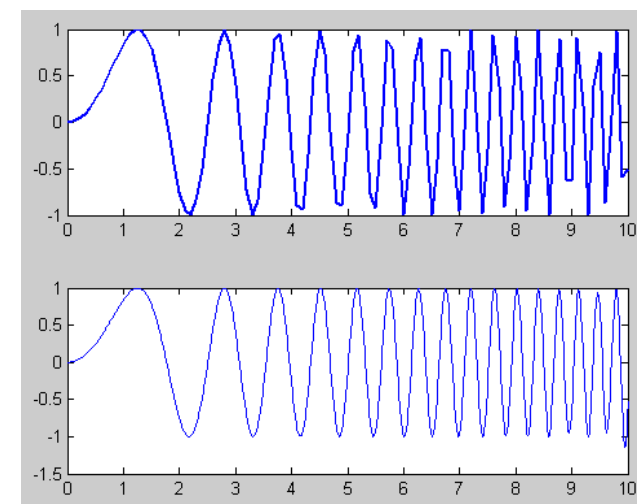


Рис. 18. Графіки сплайна, побудовані функціями *csapi* і *plot*

Зауваження.

Для обчислення сплайна в точках xx не обов'язково було другий раз викликати *csapi* і заново конструювати сплайн. Можна скористатися функцією *fnval*, яка обчислює значення сплайна в заданих точках. У наведеному вище прикладі побудова точного графіка сплайна може бути реалізована за допомогою команд

```
figure
ppi = csapi(ksi, y);
yy = fnval(ppi, xx);
plot(xx, yy)
```

Matlab: параметрична апроксимація замкнених кривих.

Іноді можуть виникати проблеми при апроксимації замкненої кривої. У більшості випадків можна повторити в кінці даних координати першої точки. Проте цього може виявитися недостатньо для того, щоб апроксимуюча крива виявилася гладкою і на останньому інтервалі. Для забезпечення гладкості у вузлі, де замикається крива, можна побудувати періодичний сплайн за допомогою функції *csape*, використовуючи кінцеву умову *conds='periodic'*.

Приклад 14. Побудова замкненої кривої за допомогою періодичного сплайна.

Нижче наведено текст відповідного М-файла, результати роботи якого відображені на рис. 19.

```
% Приклад 14
t = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11];
x = [2 3 3 2 1 -1 -1 -2 -2 0 2];
y = [ 1 2 3 4 4 3 2 1 0 2 1] ;
% Проміжні точки для інтерполяції
tt = [1:0.01:11];
% Параметрична інтерполяція
% періодичним сплайном
px=csape(t,x,'periodic');
py=csape(t,y,'periodic');
```

```
xxp = ppval(px,tt);
yyp = ppval(py, tt);
hold on;
line1=plot(xxp,yyp,x,y,'o')
set(line1,'linewidth',1.5);
title('Інтерполяція періодичним сплайном',...
      'FontName','Courier','FontSize',13)
set(gca, 'FontSize', 11);
```

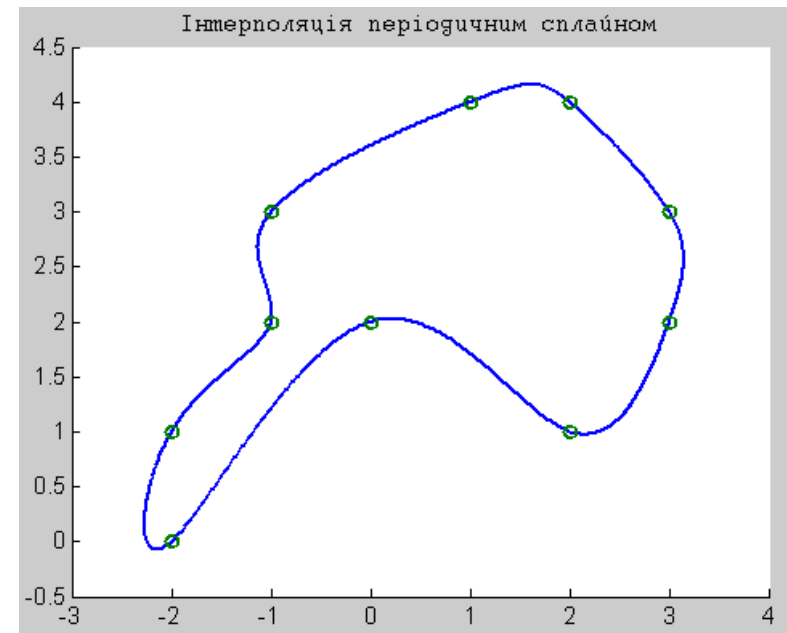


Рис. 19. Параметрична інтерполяція періодичним сплайном

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти (побудувати) СЛАР для визначення величин $\{m_i\}_{i=1}^n$, використовуючи Алгоритм 3m у випадку крайових умов I типу.

2. Знайти (побудувати) СЛАР для визначення величин $\{M_i\}_{i=1}^n$, використовуючи Алгоритм 3М у випадку крайових умов II типу.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти (побудувати) СЛАР для визначення величин $\{m_i\}_{i=1}^n$, використовуючи Алгоритм 3m у випадку крайових умов II–IV типу.

2. Знайти (побудувати) СЛАР для визначення величин $\{M_i\}_{i=1}^n$, використовуючи Алгоритм 3М у випадку крайових умов I, III–IV типу.

3. Написати М-функцію $[x,S]=spl31L(X,u,type,A,B)$ – побудова кубічного ІС за Алгоритмом 3m.

4. Написати М-функцію $[x,S]=spl32L(X,u,type,A,B)$ – побудова кубічного ІС за Алгоритмом 3М.

5. Написати М-функцію $spl31_v(X,u,T,type,A,B)$ – обчислення в точках T кубічного ІС за Алгоритмом 3с.

6. Написати М-функцію $[x,S,m]=spl31(X,u,type,A,B)$ – побудова кубічного ІС за Алгоритмом 3с.

7. Написати М-функцію $spl32_v(X,u,T,type,A,B)$ – обчислення в точках T кубічного ІС за Алгоритмом 3b.

8. Написати М-файл для тестування $spl31(X,u,type,A,B)$.

9. Написати М-файл для тестування $spl31_v(X,u,T,type,A,B)$.

10. Написати М-файл для тестування $spl32(X,u,type,A,B)$.

11. Написати М-файл для тестування $spl32_v(X,u,T,type,A,B)$.

12. Написати М-файл для тестування $spl31L(X,u,type,A,B)$.

13. Написати М-файл для тестування $spl32L(X,u,type,A,B)$.

Тема №6 ОЦІНКА ПОХИБКИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО СПЛАЙНА

Теоретичні відомості

Збіжність процесу інтерполявання сплайнами. Ми відмітили, що властивість збіжності інтерполяційного процесу залежить як від вибору послідовності сіток, так і від гладкості функції $u(x)$. Покажемо, що *процес інтерполявання сплайнами є збіжним*, тобто при необмеженому збільшенні числа вузлів n сітки відповідна послідовність сплайн-функцій збігається до інтерпольованої функції $u(x)$.

Введемо наступні позначення :

1. *коливання функції $u(x)$ на відрізку Δ_i сітки (1.1)*

$$\omega_i(u) = \max_{x', x'' \in \Delta_i} |u(x') - u(x'')|;$$

2. *коливання функції $u(x)$ на відрізку $[a, b]$*

$$\omega(u) = \max_{x', x'' \in \Delta_{[a,b]}} |u(x') - u(x'')|;$$

3. *найбільший з відрізків Δ_i сітки (1.1)*

$$\bar{h} = \max_{1 \leq i < n} (h_i);$$

4. *похибка інтерполяції функції (її похідних) $u^{(p)}(x)$ функцією $S_{m,q}^{(p)}(x; u)$ на $[a, b]$*

$$R^{(p)}(x) = S_{m,q}^{(p)}(x; u) - u^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, \dots;$$

5. *для норми функції*

$$\|u(x)\|_{C([a,b])} \equiv \max_{x \in [a,b]} |u(x)| = \max_i \left(\max_{x \in \Delta_i} |u(x)| \right);$$

$$\|u(x)\|_{\infty} \equiv \max_i \left(\sup_{x \in \Delta_i} |u(x)| \right).$$

Із перших двох позначень зрозуміло, що

$\omega_i(u) \rightarrow 0$, при $\Delta_i \rightarrow 0$; $\omega(u) \rightarrow 0$, при $\bar{h} \rightarrow 0$.

Розглянемо поведінку похибки апроксимації для найбільш уживаних сплайнів – лінійного і кубічного.

Зауважимо, що з результатами дослідження збіжності і порядками наближення інтерполювання сплайнами можна детально ознайомитись, наприклад, в [4–7].

Оцінка похибки інтерполяційного лінійного сплайна. Для похибки апроксимації функції $u(x)$ лінійним ІС має місце наступна теорема.

Теорема 6.1 Нехай $S_{1,1}(x;u)$ лінійний ІС, який апроксимує функцію $u(x)$ на сітці $\Delta_{[a,b]}$. Тоді, в залежності від гладкості $u(x)$, маємо наступні оцінки для похибки $R^{(p)}(x)$, $p = 0,1$:

а) $u \in C([a,b])$:

$$\|S_{1,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \omega(u); \quad (6.1)$$

б) $u \in C^1([a,b])$:

$$\|S_{1,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{1}{4} \bar{h} \omega(u'); \quad (6.2)$$

$$\|S'_{1,1}(x;u) - u'(x)\|_{\infty} \leq \omega(u'); \quad (6.3)$$

в) $u \in C^2([a,b])$:

$$\|S_{1,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{1}{8} \bar{h}^2 \|u''(x)\|_{C([a,b])}; \quad (6.4)$$

$$\|S'_{1,1}(x;u) - u'(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \bar{h} \|u''(x)\|_{C([a,b])}. \quad (6.5)$$

Доведення див. [5, с. 42–46].

Зауваження.

1. Оцінки (6.4), (6.5) – *точні*, тобто існують такі функції $u \in C^2([a,b])$, для яких ці нерівності перетворюються в рівності, а це означає, що ці оцінки покращити неможливо.

2. У формулах (6.3), (6.5) – похідну від $S_{1,1}(x;u)$ слід розуміти як узагальнену похідну, що обчислюється в усіх точках $[a,b]$, окрім вузлових.

Оцінка похибки інтерполяційного кубічного сплайна. Враховуючи, що при $u \in C([a,b])$ для кубічного ІС з крайовими умовами I або III типу маємо наступну оцінку [5, с.102]:

$$\|S_{3,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \left(1 + \frac{3}{4} \beta\right) \omega(u), \quad \beta = \frac{\max_i h_i}{\min_i h_i}, \quad (6.6)$$

і порівнюючи з оцінкою (6.1), отримуємо висновок, що кращу апроксимацію в цьому класі функцій дає лінійний сплайн, тому обмежимося розглядом функцій $u(x)$ більш високої гладкості.

Для похибки апроксимації функції $u(x)$ кубічним ІС мають місце наступні теореми.

Теорема 6.2 Нехай $u \in C^1([a,b])$, а $S_{3,1}(x;u)$ кубічний ІС з крайовими умовами I або III типу, який апроксимує функцію $u(x)$ на сітці $\Delta_{[a,b]}$. Тоді мають місце наступні оцінки для похибки $R^{(p)}(x)$, $p = 0,1$:

$$\|S_{3,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{9}{8} \bar{h} \omega(u'); \quad (6.7)$$

$$\|S'_{3,1}(x;u) - u'(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{11}{2} \omega(u'). \quad (6.8)$$

Доведення наведено в [5, с.101–104].

Теорема 6.3 Нехай $u \in C^2([a,b])$, а $S_{3,1}(x;u)$ кубічний ІС з крайовими умовами I, II або III типу, який апроксимує функцію $u(x)$ на сітці $\Delta_{[a,b]}$. Тоді мають місце наступні оцінки для похибки $R^{(p)}(x)$, $p = 0,1,2$:

$$\|S_{3,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{1}{4} \bar{h}^2 \omega(u''); \quad (6.9)$$

$$\|S'_{3,1}(x;u) - u'(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{13}{6} \bar{h} \omega(u''); \quad (6.10)$$

$$\|S_{3,1}''(x;u) - u''(x)\|_{C([a,b])} \leq 4\omega(u''). \quad (6.11)$$

Доведення наведено в [5, с.115–116].

Теорема 6.4 Нехай $u \in C^4([a,b])$, а $S_{3,1}(x;u)$ кубічний ІС з нульовими крайовими умовами II типу, який апроксимує функцію $u(x)$ на рівномірній сітці. Тоді мають місце наступні оцінки для похибки $R^{(p)}(x), p = 0,1,2$:

$$\|S_{3,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{1}{8}h^4 \|u^{(4)}(x)\|_{C([a,b])}; \quad (6.12)$$

$$\|S_{3,1}'(x;u) - u'(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{7}{8}h^3 \|u^{(4)}(x)\|_{C([a,b])}; \quad (6.13)$$

$$\|S_{3,1}''(x;u) - u''(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{7}{8}h^2 \|u^{(4)}(x)\|_{C([a,b])}. \quad (6.14)$$

Доведення наведено в [2, с.143–148].

Зауваження.

1. Якщо порівняти отриману оцінку (6.7) з аналогічною (6.2) для лінійного сплайна, то бачимо, що незважаючи на те, що $S_{1,1}(x;u) \notin C^1([a,b])$ і $S_{1,1}'(x;u)$ ми розуміємо в певному узагальненому сенсі (як кускову функцію), лінійний сплайн краще з інтерполює функції з класу $C^1([a,b])$ ніж кубічний.
2. Для функцій з класу $C^2([a,b])$ отримані похибки (6.9),(6.10) однозначно кращі за (6.4),(6.5), а оцінки типу (6.11) для лінійного сплайна взагалі немає.
3. Наявність в оцінках (6.9)–(6.11) множника $\omega(u'')$ означає, що їх можна покращити, якщо посилити диференціальні властивості інтерпольованої функції $u(x)$. Наприклад, нехай функція $u(x)$ належить класу $C^2W_\infty^3([a,b], \Delta_{[a,b]})$, тобто задовольняє властивості:

- а) $u \in C^2([a,b])$;
- б) $\forall x \in (a,b), x \notin x_i, 1 < i < n, \exists u'''(x)$;
- в) $u'''(x)$ обмежена на (a,b) ,

тоді оцінки для похибки $R^{(p)}(x), p = 0,1,2$ будуть такі [5]:

$$\|S_{3,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{1}{4}h^3 \|u'''\|_{\infty}; \quad (6.15)$$

$$\|S_{3,1}'(x;u) - u'(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{13}{6}h^2 \|u'''\|_{\infty}; \quad (6.16)$$

$$\|S_{3,1}''(x;u) - u''(x)\|_{C([a,b])} \leq 4h \|u'''\|_{\infty}. \quad (6.17)$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Вибравши функцію, яка належить відповідному класу гладкості, чисельно перевірити оцінки (6.1)–(6.5) для рівномірних сіток.
2. Вибравши функцію, яка належить відповідному класу гладкості, чисельно перевірити оцінки (6.7)–(6.11) для рівномірних сіток.

Завдання для самостійної роботи

1. Використовуючи дві зв'язані рівномірні сітки, методом Рунге-Ромберга чисельно перевірити оцінки (6.1)–(6.5).
2. Використовуючи дві зв'язані рівномірні сітки, методом Рунге-Ромберга чисельно перевірити оцінки (6.7)–(6.11).
3. Використовуючи три зв'язані рівномірні сітки, методом Ейткена чисельно перевірити оцінки (6.12)–(6.14).
4. Використовуючи три зв'язані рівномірні сітки, методом Ейткена чисельно знайти наближені оцінки для квадратичного сплайна (аналогічні (6.12)–(6.14)).
5. Побудувати графік залежності $\|R^{(1)}(x,h)\|_{C([a,b])}$, від h для лінійного сплайна.
6. Побудувати графіки залежності $\|R^{(p)}(x,h)\|_{C([a,b])}, p=1,2$ від h для квадратичного сплайна.
7. Побудувати графіки залежності $\|R^{(p)}(x,h)\|_{C([a,b])}, p=1,2,3$ від h для кубічного сплайна.

Тема №7

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Теоретичні відомості

Враховуючи представлення ІС на сітці (1.1) і загальний підхід до отримання формул числового диференціювання як наслідок інтерполяційних формул (1.3)

$$u^{(p)}(x) \approx \Phi_n^{(p)}(x, \bar{c}),$$

$$\Phi_n^{(p)}(x, \bar{c}) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i^{(p)}(x), \quad p=1,2,\dots \quad (7.1)$$

можна отримати застосування сплайнів до наближеного обчислення похідних від диференційованих функцій. Звичайно, що в таких випадках потрібна апріорна інформація про диференціальні властивості функції $u(x)$.

Якщо відомо, що $u(x) \in C^1([a, b])$, то для апроксимації u' краще використовувати лінійний ІС (для його побудови непотрібно розв'язувати СЛАР і похибка апроксимації у нього менша, якщо порівнювати оцінки (6.2) і (6.7)).

Для класу функцій $u(x) \in C^2([a, b])$ краще використовувати кубічний ІС.

В залежності від характеру подальшого використання $u^{(p)}(x) \approx S_{m,q}^{(p)}(x; u)$, можливі наступні сценарії:

- ✓ маємо формульне представлення $S_{m,q}(x; u), x \in \Delta_{[a,b]}$, отримуємо формульне представлення $S_{m,q}^{(p)}(x; u), x \in \Delta_{[a,b]}$ у вузлах інтерполяційної сітки;
- ✓ маємо обчислене “сплайнове” зображення $S_{m,q}(x; u)$ (представлене відповідними коефіцієнтами), розраховуємо зна-

чення $S_{m,q}^{(p)}(t; u), t \in T$, де T – деяка сітка, яка не виходить за межі відрізка $[a, b]$.

У першому випадку зручно використовувати представлення сплайна в формі “лагранжіана”. Для лінійного ІС (на рівномірній сітці), враховуючи (2.12), маємо

$$S'_{1,1}(x; u) \equiv u_{x,i}, \quad x \in \Delta_i. \quad (7.2)$$

Для кубічного ІС, враховуючи представлення (5.11) і відповідні вирази для функцій $\varphi_j(t), \psi_j(t), j=1,2$, маємо

$$S'_{3,1}(x; u) = \frac{h_i}{6} \left((-3t^2 + 6t - 2)M_i + (3t^2 - 1)M_{i+1} \right) + y_{i,i+1};$$

$$S''_{3,1}(x; u) = (1-t)M_i + tM_{i+1}; \quad (7.3)$$

$$S'''_{3,1}(x; u) = M_{i,i+1}, \quad x \in \Delta_i, \quad i=1,\dots,n-1, \quad t \in [0,1].$$

Аналогічно можна використати представлення кубічного ІС через $\{m_i, y_i\}$ у формі (5.10) з відповідними виразами для функцій $\varphi_j(t), \psi_j(t), j=1,2$ для отримання наближення до $u^{(p)}, p=1,2,3$. В [5, с.226] підкреслено, що формули (7.3) з практичної точки зору вигідніші з огляду кількості арифметичних операцій ніж відповідні формули, отримані через $\{m_i, y_i\}$.

У другому випадку зручно використовувати представлення сплайна в “поліноміальній” формі з наступним диференціюванням полінома і обчисленням його значення в точці t . При використанні системи MATLAB “поліноміальна” форма повинна співпадати з представленням поліномів в MATLAB, що дає можливість застосовувати в розрахунках функції для роботи з поліномами [11, с.21].

До цього часу ми вважали, що величини $y_i = u(X_i)$ отримані абсолютно точно, але на практиці такого не буває, особливо, коли ми маємо справу із експериментальними даними. Як правило, замість величин $\{y_i\}$ ми маємо величини $\{\tilde{y}_i\}$, які отримані із певною точністю ε , тобто $|\tilde{y}_i - y_i| \leq \varepsilon, i = \overline{1, n}$. В результа-

ті для наближення $u^{(p)}(x), p=0,1,\dots$ замість інтерполяційного сплайна $S_{m,q}^{(p)}(x;u), p=0,1,\dots$ ми маємо сплайн $\tilde{S}_{m,q}^{(p)}(x;u)$.

У випадку великих значень похибки ε має зміст використовувати *згладжуючі сплайни* з вибором параметрів згладжування, в залежності від величини похибки [5, гл.IV]. Якщо похибка невелика, то можна використовувати ІС, при цьому потрібно, як і при звичайному числовому диференціюванні, особливу увагу приділити вибору кроку сітки, так званому *оптимальному кроку*.

Отримаємо його значення при наступних апріорних даних. Будемо вважати, що функція $u \in C^2W_\infty^3([a,b], \Delta_{[a,b]})$ (див. Зауваження 3 Теми 6 і оцінку (6.17)). Нехай вона також періодична з періодом $b-a$. Тоді для кубічного ІС з крайовими умовами III типу на рівномірній сітці можна отримати наступну оцінку:

$$\|u''(x) - \tilde{S}_{3,1}''(x;u)\|_{C([a,b])} \leq 4\|u'''(x)\|_\infty \cdot h + \frac{12\varepsilon}{h^2}. \quad (7.4)$$

Враховуючи, що $h > 0$, можна знайти h_{opt} , при якому права частина (7.4) буде найменшою

$$h_{opt} = \sqrt[3]{6\varepsilon\|u'''(x)\|_\infty^{-1}}.$$

При цьому значенні кроку сітки, оцінка (7.4) матиме вигляд:

$$\|u''(x) - \tilde{S}_{3,1}''(x;u)\|_{C([a,b])} \leq 6\|u'''(x)\|_\infty^{2/3} \cdot \sqrt[3]{6\varepsilon}.$$

Насамкінець наведемо деякі корисні розрахункові формули для похідних у вузлах X_i , у випадку побудови кубічного ІС на рівномірній сітці [5, с.232-233], а саме:

а) для другої похідної

$$\frac{1}{2}\left(M_i + \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}\right) = u''(X_i) + O(h^4), \quad (7.5)$$

або

$$\frac{1}{12}(M_{i-1} + 10M_i + M_{i+1}) = u''(X_i) + O(h^4); \quad (7.6)$$

б) для третьої похідної

$$\frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2h} = u'''(X_i) + O(h^2); \quad (7.7)$$

в) для четвертої похідної:

$$\frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{h^2} = u^{IV}(X_i) + O(h^4). \quad (7.8)$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Отримати розрахункові формули, аналогічні (7.3) використовуючи представлення кубічного ІС через $\{m_i, y_i\}$ у формі (5.10).

2. Написати М-функцію для обчислення значень першої похідної на сітці T , яка не виходить за межі відрізка $[a,b]$. Використати побудовану М-функцію $spl1(X,u)$ – лінійний ІС.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати М-функцію для обчислення значень 1, 2-ї похідної на сітці T , яка не виходить за межі відрізка $[a,b]$. Використати побудовану М-функцію $spl21(X,u,type,A,B)$ – квадратичний ІС.

2. Написати М-функцію для обчислення значень 1, 2-ї похідної на сітці T , яка не виходить за межі відрізка $[a,b]$. Використати побудовану М-функцію $spl22(X,u,type,A,B)$ – квадратичний ІС.

3. Написати М-функцію для обчислення значень 1, 2, 3-ї похідної на сітці T , яка не виходить за межі відрізка $[a,b]$. Використати побудовану М-функцію $spl31(X,u,type,A,B)$ – кубічний ІС.

4. Написати М-функцію для обчислення значень 1, 2, 3-ї похідної на сітці T , яка не виходить за межі відрізка $[a,b]$. Використати побудовану М-функцію $spl32(X,u,type,A,B)$ – кубічний ІС.

5. Використовуючи розрахункові формули (7.5)–(7.8), побудувати графіки для значень 2, 3, 4-ї похідної в точках інтерполяційної сітки для функції $u(x) = e^{-x} \sin \pi x$ на відрізку $[1, 2]$.

6. Побудувавши графік залежності $\|R^{(1)}(x, h)\|_{C([a, b])}$ від h для лінійного сплайна, наближено знайти h_{opt} .

7. Побудувавши графік залежності $\|R^{(1)}(x, h)\|_{C([a, b])}$ від h для квадратичного сплайна, наближено знайти h_{opt} .

8. Побудувавши графік залежності $\|R^{(1)}(x, h)\|_{C([a, b])}$ від h для кубічного сплайна, наближено знайти h_{opt} .

Тема №8 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Теоретичні відомості

Розглянемо наближене обчислення визначених інтегралів

$$I = \int_a^b u(x) dx, \quad (8.1)$$

з урахуванням того, що інтеграл замінимо скінченною сумою на сітці (1.1), а підінтегральну функцію замінимо деяким інтерполяційним сплайном $S_{m, q}(x; u), x \in \Delta[a, b]$:

$$\tilde{I} = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x; u) dx. \quad (8.2)$$

Різниця $R(u) = I - \tilde{I}$ називається *похибкою* числового інтегрування, яка може бути оцінена, наприклад, наступним чином:

$$\begin{aligned} |R(u)| &\leq \int_a^b |S_{m, q}(x; u) - u(x)| dx \leq \\ &\leq (b - a) \|S_{m, q}(x; u) - u(x)\|_{C([a, b])}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Звичайно, більш складні висновки дають можливість отримати певні уточнення (8.3).

Отримаємо розрахункові формули (8.2) у випадку конкретних ІС.

Лінійний сплайн. Використовуючи представлення лінійного ІС у формі “лагранжіана” (2.12), маємо відому *узагальнену формулу трапецій*:

$$\tilde{I} = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \int_0^1 (y_i(1-t) + y_{i+1}t) dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} h_i (y_i + y_{i+1}). \quad (8.4)$$

Для похибки (8.3) з урахуванням оцінок (6.2), (6.4), маємо

$$|R(u)| \leq \begin{cases} (b-a) \frac{\bar{h}}{4} \|u'\|_{C([a,b])}, u \in C^1([a,b]); \\ (b-a) \frac{\bar{h}^2}{8} \|u''\|_{C([a,b])}, u \in C^2([a,b]). \end{cases} \quad (8.5)$$

Якщо $u \in W_\infty^2([a,b])$, то маємо оцінку [5, с.237]

$$|S_{1,1}(x;u) - u(x)| \leq \frac{h_i^2}{2} t(1-t) \|u''(x)\|_{L_\infty[\Delta_i]}, x \in \Delta_i,$$

з урахуванням якої отримаємо

$$|R(u)| \leq (b-a) \frac{\bar{h}^2}{12} \|u''\|_\infty. \quad (8.6)$$

Кубічний сплайн. Використовуючи представлення кубічного ІС в формі “лагранжіана” (5.10), отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 \int_0^1 (m_i t(1-t)^2 + m_{i+1} t^2(t-1)) dt + \\ &+ h_i \int_0^1 (y_i(1-t)^2(1+2t) + y_{i+1} t^3(3-2t)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} h_i (y_i + y_{i+1}) + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 (m_i - m_{i+1}). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Для похибки (8.3) з урахуванням оцінок (6.9), (6.12), маємо

$$|R(u)| \leq \begin{cases} (b-a) \frac{\bar{h}^2}{4} \|u''\|_{C([a,b])}, u \in C^2([a,b]); \\ (b-a) \frac{\bar{h}^4}{8} \|u^{(4)}\|_{C([a,b])}, u \in C^4([a,b]). \end{cases} \quad (8.8)$$

Як лінійні, так і кубічні ІС, можуть використовуватися для інтегрування швидко осцилюючих функцій, тобто обчислення інтегралів типу:

$$I_c = \int_a^b \cos(\alpha x) u(x) dx, \quad I_s = \int_a^b \sin(\alpha x) u(x) dx. \quad (8.9)$$

При великих параметрах α не рекомендується наближати всю підінтегральну функцію сплайном, так як це приводить до

великих значень числа вузлів сітки. Значно кращі результати ми отримаємо, коли тригонометричні функції будемо вважати ваговими, а функцію $u(x)$ замінимо на ІС певного степеня.

Використовуючи кубічний ІС, представимо розрахункові формули для (8.9) точні для полінома третього степеня [5, с.241]:

$$\begin{aligned} I_c &= -\frac{1}{\alpha^4} \sum_j^{n-1} \frac{\cos(\alpha X_{j+1}) - \cos(\alpha X_j)}{h_j} (M_{j+1} - M_j) + \\ &+ A \cos(\alpha a) - C \sin(\alpha a) + B \cos(\alpha b) - D \sin(\alpha b). \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} I_s &= -\frac{1}{\alpha^4} \sum_j^{n-1} \frac{\sin(\alpha X_{j+1}) - \sin(\alpha X_j)}{h_j} (M_{j+1} - M_j) + \\ &+ A \sin(\alpha a) + C \cos(\alpha a) + B \sin(\alpha b) + D \cos(\alpha b). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\alpha^2} \left(-y_{1,2} + \frac{h_1}{6} (2M_1 + M_2) \right), \quad C = \frac{1}{\alpha} \left(y_1 - \frac{1}{\alpha^2} M_1 \right), \\ B &= \frac{1}{\alpha^2} \left(y_{n-1,n} + \frac{h_{n-1}}{6} (M_{n-1} + 2M_n) \right), \quad D = \frac{1}{\alpha} \left(-y_n + \frac{1}{\alpha^2} M_n \right). \end{aligned}$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Використовуючи $S_{0,1}(x;u)$ отримати розрахункові формули типу (8.2) і оцінки типу (8.3).

2. Використовуючи представлення кубічного ІС в формі “лагранжіана” (5.11), отримати розрахункові формули типу (8.2).

3. Отримати розрахункові формули типу (8.2) на рівномірній сітці, використовуючи $S_{m,1}(x;u)$, де $m = 0,1,3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти розрахункові формули для інтегрування швидко осцилюючих функцій у випадку заміни функції $u(x)$ на лінійний ІС.

2. Написати М-функцію $polyint(a,b,P)$ для обчислення значення інтегралу на відрізку $[a,b]$ для підінтегральної функції,

яка є поліномом P (в представленні MATLAB).

3. Написати М-функцію $intsplab(x,X,S)$ для обчислення значення інтегралу на сплайновій сітці з вузлами $\{x_i\}_{i=1}^N$ для довільного сплайна S записаного в формі

$$S \equiv S_{m,1}(x;u) = \sum_{j=m}^0 s_{i,m-j+1}(x - X_i)^j,$$

$$x \in \delta_i \equiv [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n; \quad n = N - 1$$

з вузлами інтерполяції $\{X_i\}_{i=1}^n$.

4. Використовуючи інтерполяційний сплайн порядку 1,2,3 написати М-файл для знаходження визначеного інтегралу від дискретної функції на рівномірній сітці. Виконати контрольну перевірку з допомогою вбудованої функції MATLAB *quadl*.

5. Написати М-функцію $i_cof3(X,alfa,f,var,type,A,B)$ для реалізації формул (8.10), (8.11) інтегрування швидко осцилюючих функцій. Формальні параметри i_cof3 : X – інтерполяційна сітка на відрізку $[a,b]$; $alfa, f$ – параметр α і підінтегральна функція формул (8.9); $var = 1|2|3$, (при $var = 1$ обчислюється I_c ; при $var = 2$ обчислюється I_s ; при $var = 3$ обчислюється $I = [I_s, I_c]$); $type$ – тип крайових умов кубічного сплайна ($type = 1|2|3|4$); A, B – значення крайових умов (при $type = 1|2$).

6. Написати М-функцію $i_cof1(X,alfa,f,var)$ для реалізації розрахункових формул для інтегрування швидко осцилюючих функцій при заміні функції $u(x)$ на лінійний ІС. Формальні параметри i_cof1 : X – інтерполяційна сітка на відрізку $[a,b]$; $alfa, f$ – параметр α і підінтегральна функція формул (8.9); $var = 1|2|3$, (при $var = 1$ обчислюється I_c ; при $var = 2$ обчислюється I_s ; при $var = 3$ обчислюється $I = [I_s, I_c]$).

7. Використовуючи М-функції $i_cof3(X,alfa,f,3,1,A,B)$, $i_cof1(X,alfa,f,3)$ для інтегрування швидко осцилюючих функцій, знайти коефіцієнти ряду Фур'є для $f(x) = e^x, x \in [-\pi, \pi]$. Виконати порівняння з точними значеннями коефіцієнтів розкладу.

Тема №9 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ В ЗАДАЧАХ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Теоретичні відомості

Перевага сплайнів перед *різницевиими методами* і *методами типу Рунге-Кутта* [2;3;9] при числовому розв'язанні задачі Коші для ЗДР

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u), x \in (a,b]; \\ u(a) = u_a \end{cases} \quad (9.1)$$

полягає в тому, що з допомогою сплайнів ми отримуємо можливість наближено знайти розв'язок (9.1) не тільки у вузлах різницевої сітки, а і в довільних точках $t \in [a,b]$. При використанні сплайнів можливо два сценарії їх застосування. Перший – використовуючи методи різниці або Рунге-Кутта, знаходимо значення розв'язку задачі (9.1) $y_i = u(X_i)$ на сітці (1.1), а після цього використовуємо ІС, або *згладжуючі сплайни*, або *найкращого середньоквадратичного* чи *рівномірного наближення* [4]. Другий – використати знаходження розв'язку (9.1) у вигляді сплайна на кожному інтервалі $[X_i, X_{i+1}]$. Міркування з приводу переваг і недоліків цього сценарію наведено в [4, с.230-231].

Розглянемо алгоритм застосування другого сценарію у випадку використання ІС $S_{m,1}(x;u)$ порядку $m = 2,3$ [6]. Для гарантування єдиності розв'язку (9.1) будемо вважати, що виконуються такі умови:

1. $f(x,u) \in C^{m-2}(D), D = X \times U, X = [a,b],$
 $U = \{u \mid |u| < \infty\}, m = 2,3;$
2. $|f(x,u_1) - f(x,u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, f(x,u_1), f(x,u_2) \in D.$

Нехай на відрізках $\Delta_k, k = 1, \dots, i-1$ сітки (1.1) ми уже визначили сплайни. На відрізку $\Delta_i = [X_i, X_{i+1}]$ представимо сплайн у

вигляді (4.1) для $m = 2$, або у вигляді (5.1) для $m = 3$. Враховуючи, що при $m = 2$ маємо

$$u(x) = u(X_i) + u'(X_i)(x - X_i) + \alpha/2(x - X_i)^2,$$

а при $m = 3$

$$u(x) = u(X_i) + u'(X_i)(x - X_i) + u''(X_i)/2(x - X_i)^2 + \alpha/6(x - X_i)^3,$$

отримуємо розрахункові формули для коефіцієнтів сплайна. Для квадратичного сплайна (4.1):

$$c_i = y_i, \quad b_i = u'(X_i) \equiv f(X_i, y_i), \quad a_i = \alpha/2,$$

а для кубічного сплайна (5.1):

$$d_i = y_i, \quad c_i = f(X_i, y_i), \\ b_i = 0.5(f'_x(X_i, y_i) + f'_u(X_i, y_i)f(X_i, y_i)), \quad a_i = \alpha/6.$$

Невідоме значення α знаходиться з нелінійного рівняння

$$S'_{m,1}(X_{i+1}; u) = f(X_{i+1}, S_{m,1}(X_{i+1}; u)). \quad (9.2)$$

Якщо виконується умова $h_i < m/L$, то сплайн (9.2) $S_{m,1}(x; u)$, $x \in \Delta_i$, $m = 2, 3$ існує і єдиний [5, с.75], а для знаходження α можна використати метод послідовних наближень [2;3;9].

Для $m = 3$ і $f(x, u) \in C^3(D)$ мають місце оцінки [3]:

$$\|u^{(p)}(x) - S_{3,1}^{(p)}(x; u)\|_{C([a,b])} \leq K \cdot \bar{h}^{4-p}, \quad (9.3) \\ p = 0, \dots, 3, \quad \bar{h} < 3/L, \quad K = const.$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Отримати явний вигляд нелінійного рівняння (9.2) для значення α при $m = 2$.

2. Отримати явний вигляд нелінійного рівняння (9.2) для значення α при $m = 3$.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати М-функцію $[y, S] = ode_spl2(f, X, A, e, kmax)$ для знаходження наближеного розв'язку $y = u(X)$, квадратичного ІС S -

розв'язання задачі Коші на інтерполяційній сітці X відрізка $[a, b]$ з функцією f , початковим значенням $u(a) = A$ і $e, kmax$ – параметрами МПІ (по замовчуванню $e = 1E-6$, $kmax = 10000$), використовуючи алгоритм сценарію 2.

2. Написати М-функцію $[y, S] = ode_spl3(f, dfx, dfu, A, e, kmax)$ для знаходження наближеного розв'язку $y = u(X)$, кубічного ІС S -розв'язання задачі Коші на інтерполяційній сітці X відрізка $[a, b]$ з функцією f , частинними похідними по x , $u - dfx$, dfu , початковим значенням $u(a) = A$, параметрами МПІ e , $kmax$ (по замовчуванню $e = 1E-6$, $kmax = 10000$), використовуючи алгоритм сценарію 2.

3. Написати М-функцію $[y, S] = ode_spl3n(f, dfx, dfu, A, e, kmax)$ для знаходження наближеного розв'язку $y = u(X)$, кубічного ІС S -розв'язання задачі Коші на інтерполяційній сітці X відрізка $[a, b]$ з функцією f , частинними похідними по x , $u - dfx$, dfu , початковим значенням $u(a) = A$, параметрами ІП Ньютона e , $kmax$ (по замовчуванню $e = 1E-6$, $kmax = 10000$), використовуючи алгоритм сценарію 2.

4. Написати М-функцію $[y, S] = ode_spl2n(f, dfu, A, e, kmax)$ для знаходження наближеного розв'язку $y = u(X)$, кубічного ІС S -розв'язання задачі Коші на інтерполяційній сітці X відрізка $[a, b]$ з функцією f , частинною похідною по $u - dfu$, початковим значенням $u(a) = A$, параметрами ІП Ньютона e , $kmax$ (по замовчуванню $e = 1E-6$, $kmax = 10000$), використовуючи алгоритм сценарію 2.

5. Написати М-функцію $[y, S] = spl2_ode(f, X, A)$ для знаходження наближеного розв'язку $y = u(X)$, квадратичного ІС S -розв'язання задачі Коші на інтерполяційній сітці X відрізка $[a, b]$ з функцією f і початковим значенням $u(a) = A$, використовуючи алгоритм сценарію 1. Для числового розв'язку задачі Коші використати вбудовану функцію MATLAB $ode45$.

6. Написати М-функцію $[y, S] = spl3_ode(f, X, A)$ для знаходження наближеного розв'язку $y = u(X)$, кубічного ІС S -розв'язання задачі Коші на інтерполяційній сітці X відрізка $[a, b]$ з функцією f і початковим значенням $u(a) = A$, використовуючи

алгоритм сценарію 1. Для числового розв'язку задачі Коші використати вбудовану функцію MATLAB *ode45*.

7. Написати М-файл тестування функцій *ode_spl2*, *ode_spl3* для задачі Коші:

$$\begin{cases} u'(x) = \sin(x) - u, & x \in (0,10]; \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд: $u(x) = 0.5(3e^{-x} + \sin(x) - \cos(x))$. Порівняти отриману похибку з оцінками (9.3).

8. Написати М-файл тестування функцій *spl2_ode*, *spl3_ode* для задачі Коші:

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-x} - u, & x \in (0,10]; \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд: $u(x) = e^{-x}(x+1)$.

9. Написати М-файл з використанням функції *spl2_ode* для розв'язання задачі Коші:

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{\sqrt{u^3+1}}{\sqrt{x^3+1}}, & x \in (1,5]; \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

10. Написати М-файл з використанням функцій *spl3_ode* для розв'язання задачі Коші:

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt{\frac{1+x^3}{1+u^2}}, & x \in (1,5]; \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

11. Написати М-файл з використанням функцій *spl3_ode* для розв'язання задачі Коші:

$$\begin{cases} u'(x) + 2\sin(2u+3x) + 1 = 0, & x \in (0,5]; \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Тема №10

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ У КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Теоретичні відомості

Розглянемо застосування сплайнів до крайових задач для ЗДР у поєднанні з методом колокації, так званий *метод сплайн-колокації*.

Нехай дано крайову задачу у вигляді:

$$u''(x) - q(x)u(x) = -f(x), \quad x \in (a,b), \quad (10.1)$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \mu_1, \quad (10.2)$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \mu_2,$$

де $q(x), f(x)$ – задані функції відповідної гладкості, причому $q(x) \geq 0$, а $\alpha_p, \beta_p, \mu_p, p = 1, 2$ – задані числа.

Введемо на відрізку $[a,b]$ сітку (1.1), а також *сітку з вузлів колокації* (позначимо $\xi_{[a,b]}$) [5]:

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{N-1} < \xi_N, \quad \xi_i \in [a,b], \\ X_{i-1} \leq \xi_{i_j} \leq X_i, \quad 1 \leq j \leq 3. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Будемо шукати наближений розв'язок поставленої задачі у вигляді кубічного сплайна $S(x) \equiv S_{3,1}(x)$ з вузлами на сітці $\Delta_{[a,b]}$, таким чином, щоб сплайн $S(x)$ задовольняв рівняння (10.1) у вузлах колокаційної сітки $\xi_{[a,b]}$ і крайові умови (10.2):

$$\begin{aligned} S''(\xi_i) - q(\xi_i)S(\xi_i) &= -f(\xi_i), \\ i &= 1, 2, \dots, N; \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) &= \mu_1, \\ \alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) &= \mu_2, \end{aligned} \quad (10.5)$$

Розглянемо найпростішу схему метода сплайн-колокації, коли сітки $\xi_{[a,b]}, \Delta_{[a,b]}$ співпадають. У цьому випадку систему

(10.4), (10.5) можна перетворити в еквівалентну різницеву систему.

Позначимо $S(x_i) = y_i, S''(x_i) = M_i$ і, враховуючи представлення сплайна $S(x)$ у формі “лагранжіану” (5.11), маємо:

$$S(x) = (1-t)y_i + ty_{i+1} - \frac{1}{6}h_i^2 t(1-t)((2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}),$$

$$S'(x) = y_{i,i+1} - \frac{1}{6}h_i((2-6t+3t^2)M_i + (1-3t^2)M_{i+1}),$$

$$S''(x) = (1-t)M_i + tM_{i+1},$$

$$x \in \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in [0, 1]$$

З (10.4) отримаємо

$$M_i = q_i y_i - f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.6)$$

де $q_i = q(X_i)$, $f_i = f(X_i)$, і підставимо цей вираз в (5.22), з урахуванням, що $2b_i = M_i$:

$$\begin{cases} \tilde{h}_i(qy - f)_{i-1} + 2(qy - f)_i + \tilde{h}_i(qy - f)_{i+1} = 6y_{i-1;i;i+1}, \\ i = 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (10.7)$$

Нагадаємо позначення $h_i = X_{i+1} - X_i, \tilde{h}_i = h_i / (h_{i-1} + h_i), \tilde{h}_i = 1 - \tilde{h}_i$.

Аналогічно для (10.27)

$$\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_{1;2} - 2\tilde{\beta}_1(qy - f)_1 - \tilde{\beta}_1(qy - f)_2 = \mu_1, \quad (10.8)$$

$$\alpha_2 y_n + \beta_2 y_{n-1;n} + \tilde{\beta}_2(qy - f)_{n-1} + 2\tilde{\beta}_2(qy - f)_n = \mu_2.$$

Виконуємо очевидні перетворення в (10.7), (10.8) і отримуємо СЛАР відносно $\{y_i\}_{i=1}^n$:

$$\begin{cases} -C_1 y_1 + B_1 y_2 = -F_1, \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ A_n y_{n-1} - C_n y_n = -F_n. \end{cases} \quad (10.9)$$

Тут позначено

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\beta_1}{h_1}; \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\beta_1 h_1}{6}; \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{h_{n-1}}; \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2 h_{n-1}}{6};$$

$$A_1 = 0; \quad C_1 = \tilde{\beta}_1 + 2\tilde{\beta}_1 q_1 - \alpha_1; \quad B_1 = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_1 q_2;$$

$$F_1 = \tilde{\beta}_1(2f_1 + f_2) - \mu_1;$$

$$A_i = \tilde{h}_i \left(1 - \frac{h_{i-1}^2 q_{i-1}}{6} \right); \quad C_i = 1 + \frac{h_{i-1} h_i q_i}{3}; \quad B_i = \tilde{h}_i \left(1 - \frac{h_i^2 q_{i+1}}{6} \right);$$

$$F_i = \frac{h_{i-1} h_i}{6} \left(\tilde{h}_i f_{i-1} + 2f_i + \tilde{h}_i f_{i+1} \right);$$

$$A_n = \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_2 q_{n-1}; \quad C_n = \alpha_2 + \tilde{\beta}_2 + 2\tilde{\beta}_2 q_n; \quad B_n = 0;$$

$$F_n = \mu_2 + \tilde{\beta}_2(f_{n-1} + 2f_n).$$

Систему (10.9) розв'язуємо за допомогою метода *монотонної правої прогонки* [3, с.73] або *немонотонної прогонки* [3, с.93] для тридіагональної матриці. Після цього, за формулами (10.6), знаходимо M_i і отримуємо наближений розв'язок задачі (10.1), (10.2) у вигляді кубічного сплайна у формі (5.11).

При виконанні умов стійкості монотонної прогонки для системи (10.9) і $u(x) \in C^2 W_\infty^4([a, b], \Delta_{[a, b]})$ можна показати [5, с.290], що

$$\|S(x) - u(x)\|_{C([a, b])} = O(\bar{h}^2)$$

У прикладних задачах можливі випадки, коли задані функції в (10.1) в деяких точках χ_j відрізка $[a, b]$ мають розриви першого роду, що приводить до знаходження розв'язку $u(x)$ з розривною другою похідною в точках χ_j . Будемо вважати, що $\chi_j \in [a, b], j = 1, \dots, J$ – точки розриву першого роду як мінімум для однієї з функцій $q(x), f(x)$.

Можна застосувати розглянутий вище метод сплайн-колокації для побудови сплайна $S(x)$ – наближення $u(x)$. У цьому випадку вузли сітки $\Delta_{[a, b]}$ виберемо таким чином, щоб кожна точка розриву була “затиснута” між двома вузлами $X_{i_j} < \chi_j < X_{i_j+1}, h_{i_j-1} \gg h_{i_j} \ll h_{i_j+1}$, а інші вузли $\Delta_{[a, b]}$ можна обирати з огляду потрібної точності наближеного розв'язку по-

ставленої задачі. Щодо вузлів сітки $\xi_{[a,b]}$, то можна розглядати як варіант співпадання з вузлами $\Delta_{[a,b]}$, так і варіант неспівпадання, при цьому на відрізках $[X_{i_j}, X_{i_{j+1}}]$ не повинно бути колокаційних вузлів [5, с.295].

Приклад 15. Застосуємо метод сплайн-колокації до крайової задачі виду (10.1), (10.2) з розривними вхідними даними (функція $f(x)$ в точці $x_1=0$), у варіанті співпадання $\Delta_{[a,b]}$ і $\xi_{[a,b]}$, для такої тестової задачі [5, с.307]

$$\begin{cases} u''(x) = 100 \operatorname{sign}(x) + e^x, \\ x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases} \quad (10.10)$$

де точний розв'язок визначається формулою

$$u(x) = \frac{1-99x}{2} + 50x^2 \operatorname{sign}(x) + e^x - \frac{1}{2}((x+1)e + (1-x)e^{-1}).$$

Нижче наведено текст відповідного М-файла, результати роботи якого відображено на рис. 20–22.

```
% Приклад 15
% Розв'язання крайової задачі для ЗДР,
% U''(x)=100*sign(x)+exp(x), x є (-1,1),
% U(-1)=0, U(1)=1.
% Точний розв'язок :
% U(x)=0.5*(1-99*x)+50*x^2*sign(x)+
%      +exp(x)-0.5*(x+1)*e+0.5*(x-1)/e

clear all
clc

% означення q(x)
q=@(x)(0);
% означення f(x)
f=@(x)(-100.*sign(x)-exp(x));
```

```
% означення крайових умов
v=[1,0,0,...
   1,0,1];

% утворення сітки X з "затисканням"
% точки розриву 0 між двома вузлами
nx=13; X=linspace(-1,0,nx);
Y=linspace(0,1,nx);
X(nx)=-1E-4; Y(1)=1E-4; X=[X,Y];

% завдання точного розв'язку
e=exp(1);
U=@(x)(0.5.*(1-99.*x)+50.*sign(x).*x.^2+ ...
        exp(x)-0.5.*((x+1).*e+(1-x)./e));
Y=U(X);

% знаходження наближеного розв'язку КЗ
% у вигляді кубічного сплайну S(x)
% методом сплайн-колокації
[err S]=bvp_spl3(q,f,X,v);
if ~err
    % порівняння розв'язків
    plot(X,S(:,1),'b :',X,Y,'k -')
    grid on
    title('метод сплайн-колокації m=3')
    pause

    plot(X,abs(S(:,1))-Y,'b')
    grid on
    title('похибка для m=3')
    legend('|y-U(X)|','Location','Best')
    pause

    plot(X,S(:,2),'LineWidth',2)
    axis([-1.1,1.1,-110,110]);
    grid on
    title('друга похідна для U(X)')
    legend('U''(X)','Location','Best')
end
```

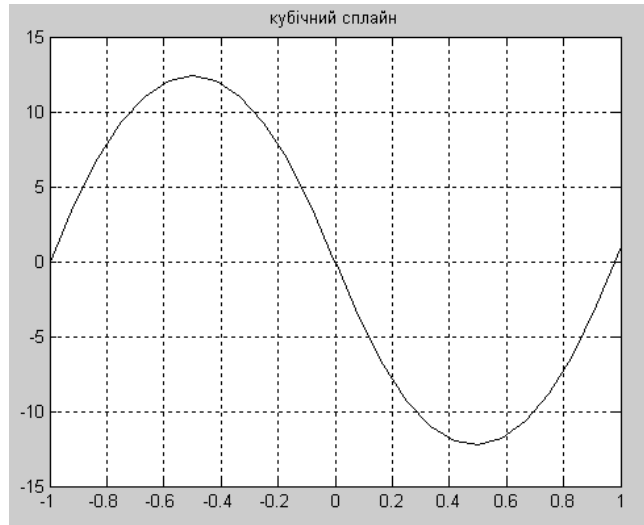



Рис. 20. Наближений розв'язок крайової задачі

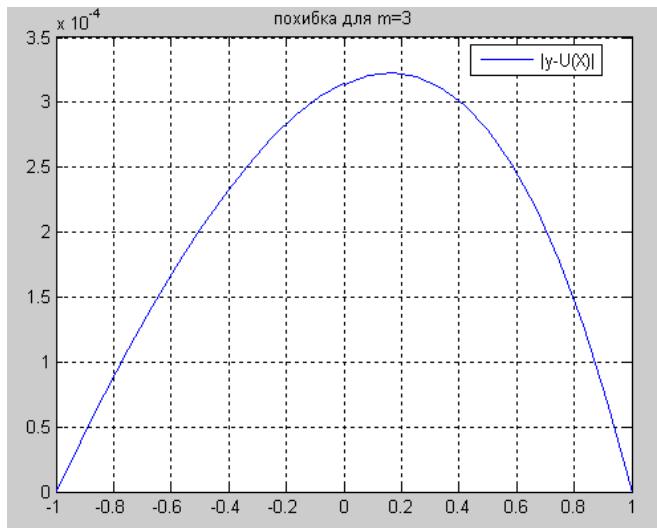


Рис. 21. Похибка наближеного розв'язку

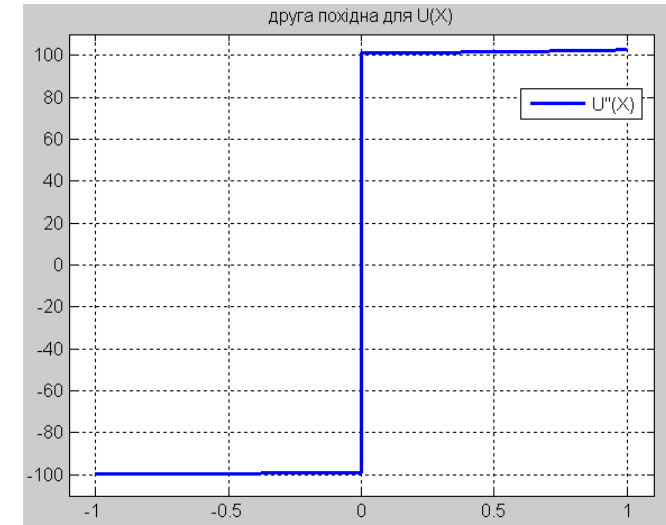


Рис. 22. Наближене значення другої похідної розв'язку

Завдання для аудиторної роботи

1. Отримати розрахункові формули для розв'язання задачі (10.1), (10.2) у варіанті застосування класичної різницевої схеми.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати M-функцію $[err\ S]=bvp_spl3(q,f,X,v)$ для знаходження наближеного розв'язку $y=u(X)$, у формі кубічного сплайна S у формі “лагранжіану” (5.11) методом сплайн-колокації для крайової задачі (10.1), (10.2) на сітці X відрізка $[a,b]$ з функціями $q(x)$, $f(x)$ і вектором крайових умов $\vec{v} = \{\alpha_1, \beta_1, \mu_1, \alpha_2, \beta_2, \mu_2\}$.

2. Написати M-функцію $Y=spl_l_s(S,m,v,T)$, для знаходження значень Y сплайна степеня m у допустимому варіанті v форми “лагранжіану” на сітці X .

3. Графічно відобразити першу похідну тестової задачі (10.10).

4. Порівняти наближені розв'язки задачі

$$\begin{cases} u''(x) - 5u(x) = -(x^2 - 1), \\ x \in (0,1], \\ u(0) = 1, u(1) = 2 \end{cases}$$

отримані за допомогою різницевого методу і методу сплайн-колокації.

5. Знайти розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} u''(x) - q(x)u(x) = -e^x, \\ x \in (-1,1), \\ u(-1) = 0, u(1) = 1, \end{cases}$$

де

$$q(x) = \begin{cases} x^3 - 1, x \in [-1,0); \\ x^3, x \in [0,1]. \end{cases}$$

Побудувати графіки наближеного розв'язку та його другої похідної.

6. Знайти розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} u''(x) - \text{sign}(x)u(x) = -f(x), \\ x \in (-1.5,1.5), \\ u(-1.5) = 0, u(1.5) = 1, \end{cases}$$

де

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 0.5, x \in [-1.5,0.5); \\ -x^2 + 0.25, x \in [0.5,0.5]; \\ (x-1)^2 + 0.25, x \in (0.5,1.5]. \end{cases}$$

Побудувати графіки наближеного розв'язку та його другої похідної.

Тема №11 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА II РОДУ

Теоретичні відомості

Розглянемо *метод заміни шуканої функції* для наближеного розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду [4, с.212]:

$$u(x) + \lambda \int_a^b K(x, \theta)u(\theta)d\theta = f(x), \quad (11.1)$$

де $f(x) \in C([a, b])$, $K(x, \theta) \in C([a, b] \times [a, b])$, $K(x, \theta) \neq 0$ – відомі функції, $\lambda \neq 0$ – дійсне число. Якщо λ не співпадає із характеристичними числами рівняннями (11.1), то згідно із теоремами Фредгольма, рівняння (11.1) має розв'язок при $\forall f(x)$ і цей розв'язок єдиний. Нехай виконується нерівність

$$\vartheta = |\lambda| \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, \theta)| dt < 1, \quad (11.2)$$

тоді, враховуючи гладкість відомих функцій, можна гарантувати, що $u(x) \in C([a, b])$.

Метод заміни шуканої функції залежить від виду функції, яка використовується для наближення. Будемо наближати шукану функцію $u(x)$ за допомогою сплайна відповідного степеня:

- ✓ кусково-стала апроксимація $u(x)$ (сплайн степені 0) – *метод колокації*;
- ✓ кусково-лінійна апроксимація $u(x)$ – *метод сплайн-функцій першого степеня*;
- ✓ кусково-квадратична апроксимація $u(x)$ – *метод сплайн-функцій другого степеня*;
- ✓ кусково-кубічна апроксимація $u(x)$ – *метод сплайн-функцій третього степеня*.

Метод колокації. На відрізьку інтегрування $[a, b]$ вводимо сітку $\Delta_{[a, b]}$ (1.1) і колокаційну сітку $\xi_{[a, b]}$:

$$\xi_{[a,b]} = \bigcup_{i=1}^N \xi_i; \quad N = n-1, \quad (11.3)$$

$$\xi_i = 0.5(X_i + X_{i+1}), \quad X_i \in \Delta_{[a,b]}.$$

Запишемо рівняння (11.1) (з урахуванням адитивності інтеграла) в довільній точці колокації ξ_i , $i = 1, \dots, N$, враховуючи, що $y_i = u(\xi_i) \equiv S_{0,1}(X_i; u)$, $\xi_i \in [X_i, X_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} y_i + \lambda \sum_{j=1}^N \int_{X_j}^{X_{j+1}} K(\xi_i, \theta) S_{0,1}(X_j; u) d\theta &= \\ &= y_i + \lambda \sum_{j=1}^N y_j \int_{X_j}^{X_{j+1}} K(\xi_i, \theta) d\theta \approx \\ &\approx y_i + \lambda \sum_{j=1}^N y_j K(\xi_i, \xi_j) h_j = f(\xi_i). \end{aligned}$$

В останньому перетворенні, враховуючи (11.3), ми наближено обчислили інтеграл за методом *центральных прямокутників* [9, с.254]. Об'єднуючи рівняння для всіх точок колокації, отримуємо СЛАР відносно $\bar{y} = \{y_i\}_{i=1}^N$, яку запишемо в матричній формі

$$A\bar{y} = \bar{f},$$

де елементи матриці і права частина СЛАР визначаються наступним чином (δ_{ij} – символ Кронекера):

$$A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^N, \quad a_{i,j} = \delta_{ij} + \lambda K(\xi_i, \xi_j) h_j; \quad \bar{f} = \{f(\xi_i)\}_{i=1}^N.$$

Метод сплайн-функцій з лінійним сплайном. На кожному з відрізків сітки $\Delta_{[a,b]}$ (1.1) замінимо шукану функцію лінійним сплайном у формі “лагранжіана” (2.12):

$$S_{1,1}(x; u) = y_i \psi_1(t) + y_{i+1} \psi_2(t), \quad x \in \Delta_i;$$

$$y_i = u(X_i) = S_{1,1}(X_i; u);$$

$$\psi_1(t) = 1-t; \quad \psi_2(t) = t; \quad t \in [0,1]; \quad x = X_i + th_i.$$

Запишемо рівняння (11.1) у кожній точці X_i , $i = 1, \dots, n$ сітки $\Delta_{[a,b]}$ з урахуванням адитивності інтеграла:

$$\begin{aligned} y_i + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \int_{X_j}^{X_{j+1}} K(X_i, \theta) S_{1,1}(\theta; u) d\theta &= \\ &= y_i + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \left(y_j \int_0^1 K_{i,j}(t) \psi_1(t) h_j dt + y_{j+1} \int_0^1 K_{i,j}(t) \psi_2(t) h_j dt \right) = f(X_i), \end{aligned}$$

де введено позначення

$$K_{i,j}(t) = K(X_i, X_j + th_j). \quad (11.4)$$

Об'єднуючи рівняння для всіх точок сітки $\Delta_{[a,b]}$, отримуємо

СЛАР відносно $\bar{y} = \{y_i\}_{i=1}^n$, яку запишемо в матричній формі

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= \bar{f}, \\ A &= \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n, \quad \bar{f} = \{f(X_i)\}_{i=1}^n, \end{aligned}$$

де елементи матриці можна обчислити наступним чином:

$$a_{i,j} = \delta_{ij} + \lambda \tilde{a}_{i,j},$$

$$\tilde{a}_{i,1} = h_1 \int_0^1 K_{i,1}(t) \psi_1(t) dt;$$

$$\tilde{a}_{i,j} = h_{j-1} \int_0^1 K_{i,j-1}(t) \psi_2(t) dt + h_j \int_0^1 K_{i,j}(t) \psi_1(t) dt, \quad j = 2, \dots, n-1;$$

$$\tilde{a}_{i,n} = h_{n-1} \int_0^1 K_{i,n-1}(t) \psi_2(t) dt.$$

При умовах існування розв'язку для (11.1) і виконанні умови (11.2) лінійний сплайн існує і єдиний на довільній сітці (1.1) і апроксимує розв'язку задачі (11.1), причому для похибки апроксимації мають місце оцінки [4]

$$\|S_{1,1}(x;u) - u(x)\|_{C([a,b])} \leq \frac{1}{1-\vartheta} \begin{cases} \omega(u), u \in C([a,b]), \\ \frac{\bar{h}}{4} \omega(u'), u \in C^1([a,b]), \\ \frac{\bar{h}^2}{8} \|u''\|_{C([a,b])}, u \in C^2([a,b]). \end{cases}$$

Метод сплайн-функцій з квадратичним сплайном. Для спрощення подальших викладок будемо розглядати рівномірну сітку $\Delta_{[a,b]}$ (1.1). На кожному відрізку сплайн-сітки $\delta_{[a,b]}$ (4.10), з урахуванням (4.11), замінимо шукану функцію квадратичним сплайном:

$$\begin{aligned} S_i(x) &\equiv S_{2,1}(x;u) = a_i(x - X_i)^2 + m_i(x - X_i) + y_i, \quad x \in \delta_i; \\ m_i &= S'_{2,1}(X_i;u), \quad y_i = u(X_i) = S_{2,1}(X_i;u), \\ a_1 &= h_1^{-1}(2y_{1;2} - 0.5(3m_1 + m_2)), \\ a_i &= h_{i-1}^{-1}(0.5(m_{i-1} + 3m_i) - 2y_{i-1;i}), \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Після цього запишемо рівняння (11.1) у кожній точці X_i , $i = 1, \dots, n$ сітки $\Delta_{[a,b]}$ з урахуванням адитивності інтеграла на відрізку $[a, b]$ і наближеним обчисленням інтеграла на кожному з δ_i , причому для δ_1 – лівих прямокутників; для δ_n – правих прямокутників; для решти δ_i – центральних прямокутників:

$$y_i + \lambda \sum_{j=1}^n K_{i,j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} S_j(\theta) d\theta = f(X_i), i = 1, \dots, n. \quad (11.5)$$

В (11.5) позначено $K_{i,j} = K(X_i, X_j)$.

До рівнянь (11.5) додамо рівняння визначення параметрів $\{m_i\}_{i=1}^n$ квадратичного сплайна з крайовими умовами IV типу:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + 2y_{1;2} = 0, \\ m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1} - 4(y_{i-1;i} + y_{i;i+1}) = 0, i = 2, \dots, n-1, \\ m_{n-1} + m_n - 2y_{n-1;n} = 0. \end{cases} \quad (11.6)$$

Таким чином, для вектора невідомих $\{m_1, \dots, m_n, y_1, \dots, y_n\}^0$, розв'язуємо СЛАР (11.5) – (11.6).

Якщо виконується умова (11.2) і розв'язок задачі (11.1) належить $C^p([a, b])$, то квадратичний сплайн існує, єдиний і мають місце оцінки [4, с.214]

$$\begin{aligned} \|S_{2,1}^{(i)}(x;u) - u^{(i)}(x)\|_{C([a,b])} &\leq \left(B(i, p) + \frac{4\vartheta}{1-\vartheta} \right) \bar{h}^{p-i} \omega(u^{(p)}), \\ &0 \leq i \leq p \leq 3, \\ B(0,2) &= 0.875, \quad B(1,2) = B(2,2) = 3.5, \\ 0.5B(1,1) &= B(0,1) = 2.5, \quad B(0,0) = 2. \end{aligned}$$

Метод сплайн-функцій з кубічним сплайном. На кожному з відрізків сітки $\Delta_{[a,b]}$ (1.1) замінимо шукану функцію кубічним сплайном у формі “лагранжіана” (5.11):

$$\begin{aligned} S_{3,1}(x;u) &= M_i h_i^2 \varphi_1(t) + M_{i+1} h_i^2 \varphi_2(t) + y_i \psi_1(t) + y_{i+1} \psi_2(t), \quad x \in \Delta_i; \\ M_i &= S''_{3,1}(X_i;u), \quad y_i = u(X_i) = S_{3,1}(X_i;u); \\ \varphi_1(t) &= -\frac{1}{6} t(1-t)(2-t), \quad \varphi_2(t) = -\frac{1}{6} t(1-t)(1+t), \\ \psi_1(t) &= 1-t, \quad \psi_2(t) = t, \quad t \in [0,1]; \quad x = X_i + th_i. \end{aligned}$$

Запишемо рівняння (11.1) у кожній точці X_i , $i = 1, \dots, n$ сітки з урахуванням адитивності інтеграла і позначень (11.4):

$$y_i + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \left(M_j h_j^3 \int_0^1 K_{i,j} \varphi_1(t) dt + M_{j+1} h_j^3 \int_0^1 K_{i,j} \varphi_2(t) dt + \right.$$

$$+ y_j h_j \int_0^1 K_{i,j} \Psi_1(t) dt + y_{j+1} h_j \int_0^1 K_{i,j} \Psi_2(t) dt \Big) = f(X_i), \quad (11.7)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

До рівнянь (11.7) додамо рівняння визначення параметрів $\{M_i\}_{i=1}^n$ кубічного сплайна з крайовими умовами IV типу:

$$M_1 - (1 + \eta)M_2 + \eta M_3 = 0,$$

$$(2 + \eta)M_2 + (1 - \eta)M_3 + \frac{6}{h_1 + h_2}(y_{1;2} - y_{2;3}) = 0,$$

$$\tilde{h}_i M_{i-1} + 2M_i + \tilde{h}_i M_{i+1} + \frac{6}{h_{i-1} + h_i}(y_{i-1;i} - y_{i;i+1}) = 0, \quad (11.8)$$

$$i = 3, \dots, n-2,$$

$$(1 - \mu)M_{n-2} + (2 + \mu)M_{n-1} + \frac{6}{h_{n-2} + h_{n-1}}(y_{n-2;n-1} - y_{n-1;n}) = 0,$$

$$\mu M_{n-2} - (1 + \mu)M_{n-1} + M_n = 0.$$

Нагадаємо про позначення в (11.8): $\tilde{h}_i = h_i / (h_{i-1} + h_i)$, $\tilde{h}_i = 1 - \tilde{h}_i$,
 $\eta = h_1 h_2^{-1}$, $\mu = h_{n-1} h_{n-2}^{-1}$.

Таким чином, для вектора невідомих $\{M_1, \dots, M_n, y_1, \dots, y_n\}^0$, розв'язуємо СЛАР (11.7) – (11.8).

Якщо виконується умова (11.2) і розв'язок задачі (11.1) належить $C^p([a, b])$, то квадратичний сплайн існує, єдиний і мають місце оцінки [4, с.214]

$$\|S_{3,1}^{(i)}(x; u) - u^{(i)}(x)\|_{C([a,b])} \leq \left(C(i, p) + \frac{59}{1-9} \right) \bar{h}^{p-i} \omega(u^{(p)}),$$

$$0 \leq i \leq p \leq 3,$$

$$C(i, 3) \leq 18, C(i, 2) \leq 16, C(i, 1) \leq 17, C(0, 0) \leq 9.$$

Застосуємо цей метод до наступної задачі.

Приклад 16. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$u(x) - 12 \int_0^1 \frac{1}{x+1} u(\theta) d\theta = x^2(1-x) - \frac{1}{x+1},$$

де точний розв'язок визначається формулою

$$u(x) = x^2(1-x).$$

Нижче наведено текст відповідного М-файла, результати роботи якого відображено на рис. 23–24.

```
function My=fr2r_mz3(lambda,X,Kfun,ffun)
% Розв'язок лінійного неоднорідного
% інтегрального рівняння
% типу Фредгольма другого роду методом
% заміни шуканої
% функції кубічним сплайном
%
%          b
%      y(x)=f(x)+lambda* S K(x,s)*y(s) ds
%          a
% вхідні дані :
% lambda - числовий параметр рівняння;
% X      - сітка розбиття області
% a=X(1)<X(2)<...<X(n-1)<X(n)=b,
% n=length(X);
% Kfun - функція користувача, з описом ядра K
% ffun - функція користувача, з описом
% правої частини f(x);
% вихідні дані:
% My - масив зі значеннями {M,y} в точках X.

n=length(X); nm1=n-1; N=2.*n;

% Формування СЛАР
A11=zeros(n); A12=eye(n);
A=[A11,A12;A11,A11];
clear A11 A12
% обчислення допоміжних змінних
for k=1:nm1
    Xs(k)=0.5.*(X(k+1)+X(k));
```

```

    h(k)=X(k+1)-X(k);
end

f=zeros(N,1);
l2=0.5.*lambda; c12=-1./12;

% формування частини СЛАР з інтегр.рівняння
for i=1:n
    z1=X(i); f(i)=ffun(z1);
    for k=1:nm1
        z=h(k); kf=l2.*z.*Kfun(z1,Xs(k));
        z=c12.*kf.*z.*z;
        k1=k+1; nk=n+k; nk1=nk+1;
        A(i,k)=A(i,k)+z; A(i,k1)=A(i,k1)+z;
        A(i,nk)=A(i,nk)+kf;
        A(i,nk1)=A(i,nk1)+kf;
    end
end
clear kf l2 c12 Xs

% формування частини СЛАР з визнач.сплайна
hm=h(1); hi=h(2); z=hm./hi;
j=n+1; A(j,1)=1; A(j,2)=-1-z; A(j,3)=z;
j=j+1; A(j,2)=2+z; A(j,3)=1-z;
z=hm+hi; hh=hi./z;
k=n+1; z=6./(hm.*hi); z1=z.*hh;
A(j,k)=-z1; A(j,k+1)=z; A(j,k+2)=-z+z1;
for i=3:n-2
    j=j+1; im=i-1;
    hm=h(im); hi=h(i); z=hm+hi; hh=hi./z;
    A(j,im)=1-hh; A(j,i)=2; A(j,i+1)=hh;
    k=n+i; z=6./(hm.*hi); z1=z.*hh;
    A(j,k-1)=-z1; A(j,k)=z; A(j,k+1)=-z+z1;
end

hm=h(n-2); hi=h(nm1); z=hi./hm;
A(N,n-2)=z; A(N,nm1)=-1-z; A(N,n)=1;
j=N-1; A(j,n-2)=1-z; A(j,nm1)=2+z;

```

```

z=hm+hi; hh=hi./z; z=6./(hm.*hi); z1=z.*hh;
A(j,N-2)=-z1; A(j,N-1)=z; A(j,N)=-z+z1;

% розв'язування СЛАР (M=My(1:n);y=My(n+1:N))
My=A\f;
return

function yp=fun_f(x)
% Опис правої частини f(x)
yp=x.^2.*(1-x)-1./(x+1);
return

function yp=fun_K(x,s)
% Опис ядра K(x,s)
yp=1./(x+1);
return

% Приклад 16
% Використовуючи інтерполяційний сплайн
% порядку 3 розв'язати інтегральне рівняння
% Фредгольма другого роду
% на рівномірній сітці
clear all
clc
a=0; b=1;
lamb=-12;

% формуємо рівномірну сітку
n=101; X=linspace(a,b,n);

% розв'язуємо інтегральне рівняння
My=fr2r_mz3(lamb,X,@fun_K,@fun_f);

% точний розв'язок u(x)=x*x*(1-x)
u=@(x)(x.*x.*(1-x));
Z=u(X);

% Візуалізація наближеного розв'язку у
% і точного u(X)

```

```

plot(X,My(n+1:2*n), 'm', X,Z, 'k')
grid on
xlabel('x')
ylabel('U(x)')
pause

% Порівняння наближеного розв'язку з точним
% у вузлах сітки X
for i=1:n
    Z(i)=Z(i)-My(n+i);
end
plot(X,Z, 'r')
grid on
xlabel('x')
ylabel('U(x)-u(x)')
norm(Z,inf)

```

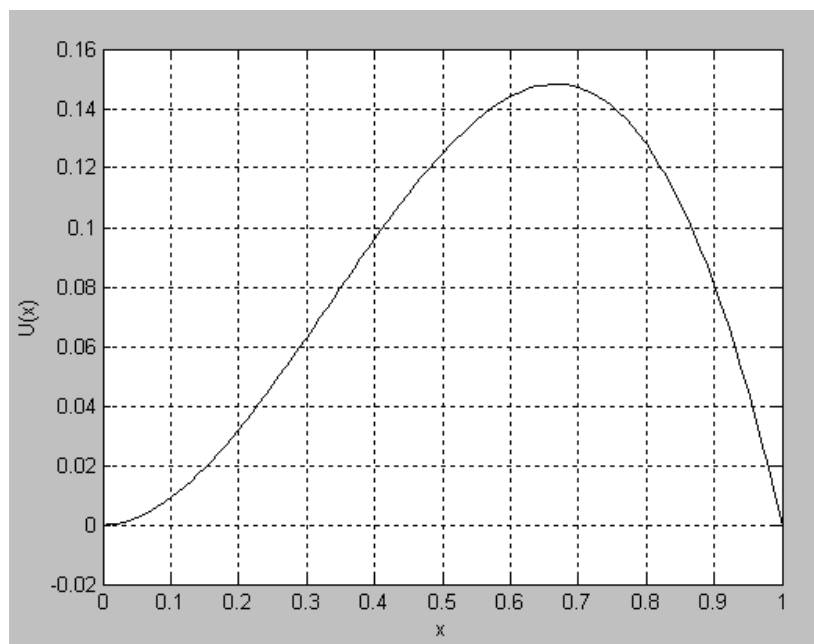


Рис. 23. Наближений розв'язок інтегрального рівняння

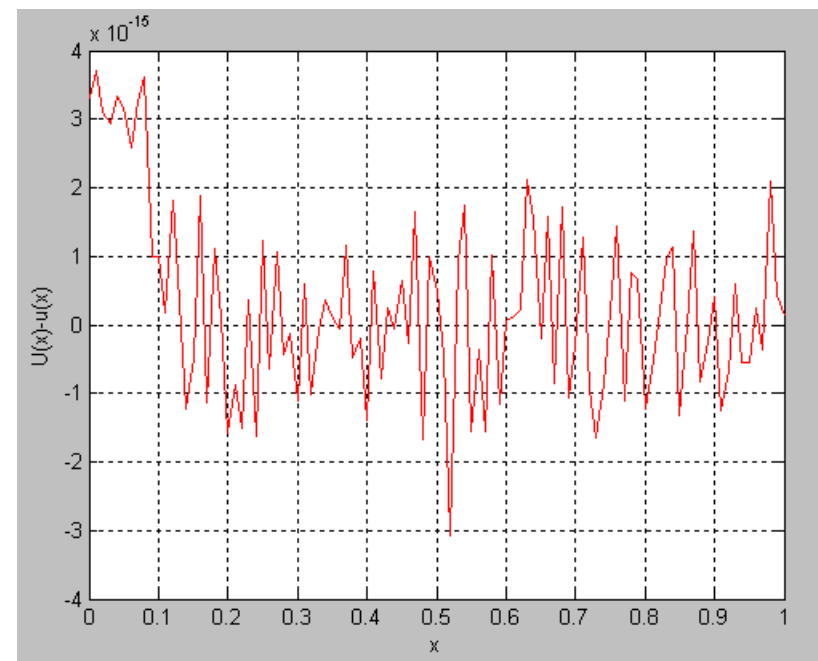


Рис. 24. Похибка наближеного розв'язку

Завдання для аудиторної роботи

1. Отримати розрахункові формули для лінійного сплайна у випадку обчислення (11.4) із значенням $t=0.5$.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати М-функцію $[y, Xk] = fr2r_mz0(lambda, X, Kf, ff)$ для знаходження наближеного розв'язку $y=u(X)$ рівняння (11.1), у формі сплайна порядку 0 на сітці X відрізка $[a, b]$ з точками колокації Xk , ядром $Kf(x)$ і правою частиною $ff(x)$.
2. Написати М-функцію $y = fr2r_mz1(lambda, X, Kf, ff)$ для знаходження наближеного розв'язку $y=u(X)$ рівняння (11.1), у формі лінійного сплайна на сітці X відрізка $[a, b]$ з ядром $Kf(x)$ і правою частиною $ff(x)$.

3. Написати M-функцію $y = fr2r_mz2(lambda, X, Kf, ff)$ для знаходження наближеного розв'язку $y=u(X)$ рівняння (11.1), у формі квадратичного сплайна на рівномірній сітці X відрізка $[a, b]$ з ядром $Kf(x)$ і правою частиною $ff(x)$.

4. Написати M-функцію $y = fr2r_mz3(lambda, X, Kf, ff)$ для знаходження наближеного розв'язку $y=u(X)$ рівняння (11.1), у формі кубічного сплайна на рівномірній сітці X відрізка $[a, b]$ з ядром $Kf(x)$ і правою частиною $ff(x)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ

1. В чому полягає задача інтерполяції.
2. Навести записи інтерполяційних поліномів у формі Лагранжа і Ньютона.
3. У чому полягають властивості збіжності інтерполяційного процесу.
4. Навести приклади Бернштейна і Рунге.
5. Що таке кусково-поліноміальна інтерполяція.
6. Навести приклади обмеженості практичного застосування інтерполяційних поліномів і мотивація введення сплайнів.
7. Охарактеризувати вбудовані функції Matlab для роботи із сплайнами.
8. В чому полягає кусково-поліноміальна форма сплайна в Matlab і її представлення у вигляді структури.
9. Навести різні форми зображення сплайнів.
10. Дати означення Ермітового кубічного сплайна.
11. Дати означення згладжуючого кубічного сплайна.
12. Як здійснюється побудова інтерполяційного сплайна $S_{0,1}(x; u)$.
13. Як здійснюється побудова інтерполяційного сплайна $S_{1,1}(x; u)$.
14. Як представляється інтерполяційний сплайн у формі “лагранжіана”.
15. Як здійснюється побудова інтерполяційного квадратичного сплайна $S_{2,1}(x; u)$.
16. Типи крайових умов для квадратичного сплайна.
17. У чому полягає Алгоритм 2m побудови інтерполяційного сплайна для крайових умов типів I-IV.
18. У чому полягає Алгоритм 2M побудови інтерполяційного сплайна для крайових умов типів I-IV.
19. Як здійснюється побудова інтерполяційного кубічного

- сплайна $S_{3,1}(x;u)$.
20. У чому полягає Алгоритм 3m побудови інтерполяційного сплайна.
 21. У чому полягає Алгоритм 3M побудови інтерполяційного сплайна.
 22. У чому полягає Алгоритм 3c побудови інтерполяційного сплайна.
 23. У чому полягає Алгоритм 3b побудови інтерполяційного сплайна.
 24. Як здійснюється реалізація сплайнів з заданими умовами на кінцях засобами Matlab.
 25. Навести приклади побудови сплайнів для крайових умов різних типів.
 26. Охарактеризувати функції *csape, csapi* та їх синтаксис. Вкажіть особливості їх застосування.
 27. У чому полягають збіжність та екстремальна властивість інтерполяційних сплайнів.
 28. Навести оцінку похибки інтерполяційного лінійного сплайна.
 29. Навести оцінку похибки інтерполяційного кубічного сплайна.
 30. У чому полягають методи числового диференціювання з використанням сплайн-функцій.
 31. Навести оцінку похибки похідних.
 32. У чому полягають методи числового інтегрування з використанням сплайн-функцій.
 33. Як здійснюється заміна інтеграла скінченною сумою, підінтегральної функції – інтерполяційним сплайном.
 34. Навести оцінку похибки.
 35. Розрахункові формули для лінійного сплайна в задачах числового інтегрування.
 36. Записати розрахункові формули для кубічного сплайна в задачах числового інтегрування..
 37. Записати розрахункові формули точні для поліномів третього степеня в задачах числового інтегрування..
 38. Як здійснюється застосування сплайнів в задачах Коші

39. У чому полягає перевага сплайнів перед різницевиими методами і методами Рунге-Кутта в задачах Коші для звичайних диференціальних рівнянь.
40. Навести сценарії застосування сплайнів в задачах Коші.
41. Навести алгоритми застосування сплайнів в задачах Коші. Записати оцінки похибки.
42. Як здійснюється застосування сплайнів у крайових задачах для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку
43. У чому полягає метод сплайн-колокації розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Навести схему методу.
44. Навести розрахункові формули методу сплайн-колокації.
45. Охарактеризувати методи монотонної або немонотонної прогонки для розв'язання систем рівнянь.
46. Навести оцінку похибки.
47. Вказати особливості застосування методу до диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами.
48. В чому полягає зміст методу скінченних елементів.
49. Як здійснюється застосування сплайнів для розв'язування коректних інтегральних рівнянь: метод колокації; заміна шуканої функції лінійним сплайном.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Schoenberg I.J.* Spline interpolation and the higher derivatives, Number theory and analysis / I.J. Schoenberg. – New York, 1968. – 306 p.
2. *Самарский А.А.* Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989 – 432 с.
3. *Ляшко И.И.* Методы вычислений / И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатько. – К.: Вища школа, 1977 – 408 с.
4. *Стечкин С.Б.* Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М.: Наука, 1976 – 248 с.
5. *Завьялов Ю.С.* Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980 – 432 с.
6. *Макаров В.Л.* Сплайн-аппроксимация функций / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов. – М.: Высшая школа, 1983 – 80 с.
7. *Алберг Дж.* Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972 – 316 с.
8. *Самарский А.А.* Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
9. *Попов В.В.* Методи обчислень: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету / В.В. Попов. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2012. – 303 с.
10. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных / Н. Вирт. – М.: Мир, 1989. – 360 с.
11. *Довгий Б.П.* Використання математичного пакета MATLAB для розв'язування прикладних задач: навчальний посібник / Б.П. Довгий, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, А.В. Попов. – К.: Фітосоціоцентр, 2012. – 78 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
Тема №1 ОСНОВИ ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ТА ОБГРУНТУВАННЯ ВВЕДЕННЯ СПЛАЙНІВ	5
Тема №2 ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ СПЛАЙНІВ ТА ФОРМИ ЇХ ЗОБРАЖЕННЯ	9
Тема №3 ВБУДОВАНІ ФУНКЦІЇ МАТЛАВ ДЛЯ РОБОТИ ІЗ СПЛАЙНАМИ ТА ЇХ СИНТАКСИС	19
Тема №4 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КВАДРАТИЧНОГО СПЛАЙНА	30
Тема №5 МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО КУБІЧНОГО СПЛАЙНА	45
Тема №6 ОЦІНКА ПОХИБКИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО СПЛАЙНА ...	74
Тема №7 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ	79
Тема №8 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ	84

Тема №9 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ В ЗАДАЧАХ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	88
Тема №10 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ У КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	92
Тема №11 ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙНІВ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА II РОДУ	100
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ.....	112
ЛІТЕРАТУРА.....	115