Навчальна практика з методів обчислень (без відриву від навчання) (для студентів освітньої програми «Математика» 4 курсу)

П.1 Нехай на відрізку $[a,b]\in\Re$ задано впорядковані точки (вузли), які назвемо *інтерполяційною сіткою*:

$$a=X_1<X_2<\ldots<X_{n-1}<X_n=b\,.$$

Введемо позначення:

$$[a,b]=\Delta_{[a,b]}=\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{n-1}\Delta_{\mathrm{i}},\ \Delta_i=[X_i,X_{i+1}],\ h_i=X_{i+1}-X_i,\ i=1,\ldots,n-1.$$

В вузлах інтерполяційної сітки відомі значення деякої функції $u(x)$:

$$y_i=u(X_i),\ \ i=1,\ldots,n.$$

Сітку з вузлами сплайна (позначимо $\delta_{[a,b]}$) визначим таким чином:

$$a=x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}=b;$$

$$x_1=X_1;\ x_{n+1}=X_n;\ x_i=0.5(X_{i-1}+X_i)=X_{i-1}+0.5h_{i-1}=X_i-0.5h_{i-1},i=2,\ldots,n;$$

$$[\mathrm{a},\mathrm{b}]=\delta_{[a,b]}=\bigcup_{i=1}^{n}\delta_i,\ \delta_i=[x_i,x_{i+1}].$$

Означення 1 Функція $S_{2,1}(x;u),\ x\in[a,b]$ називається *інтерполяційним квадратичним сплайном дефекту* 1, якщо

а) на кожному відрізку $\delta_i,\ i=1,\ldots,n$ функція $S_{2,1}(x;u)$ є поліномом степеня 2:

$$S_{2,1}(x;u)=a_i(x-X_i)^2+b_i(x-X_i)+c_i,\ x\in\delta_i,\ i=1,\ldots,n.$$

б) неперервна на $[a,b]$ разом зі своєю похідною: $S_{2,1}(x;u)\in C^1([a,b])$.

в) інтерполює функцію $u(x)$ у вузлах сітки $\Delta_{[a,b]}$: $S_{2,1}(X_i;u)=y_i,\ i=1,\ldots,n$

Для однозначного визначення квадратичного сплайна використовуються наступні *типи крайових умов*:

$$\text{I. } \mathrm{S}'_{2,1}(a;u)=A,\ \mathrm{S}'_{2,1}(b;u)=B;$$

$$\text{II. } \mathrm{S}''_{2,1}(a;u)=A,\ \mathrm{S}''_{2,1}(b;u)=B;$$

$$\text{III. } S^{(p)}_{2,1}(a;u)=S^{(p)}_{2,1}(b;u),\ p=1,2;$$

$$\text{IV. } \mathrm{S}''_{2,1}(x_j+0;u)=\mathrm{S}''_{2,1}(x_j-0;u),\ j=\overline{2,n}.$$

Означення 2 Функція $S_{3,1}(x;u),\ x\in[a,b]$ називається *інтерполяційним кубічним сплайном дефекту* 1, якщо

а) на кожному відрізку $\Delta_i,\ i=1,\ldots,n-1$ функція $S_{3,1}(x;u)$ є поліномом степеня 3:

$$S_{3,1}(x;u)=a_i(x-X_i)^3+b_i(x-X_i)^2+c_i(x-X_i)+d_i,\ x\in\Delta_i,\ i=1,\ldots,n-1.$$

б) неперервна на $[a,b]$ разом зі своїми похідними до степеня *2* включно: $S_{3,1}(x;u)\in C^2([a,b])$.

в) інтерполює функцію $u(x)$ у вузлах сітки $\Delta_{[a,b]}$: $S_{3,1}(X_i;u)=y_i,\ i=1,\ldots,n$.

Для однозначного визначення кубічного сплайна використовуються наступні *типи крайових умов*:

$$\text{I. } \mathrm{S}'_{3,1}(a;u)=A,\ \mathrm{S}'_{3,1}(b;u)=B;$$

$$\text{II. } \mathrm{S}''_{3,1}(a;u)=A,\ \mathrm{S}''_{3,1}(b;u)=B;$$

$$\text{III. } S^{(p)}_{3,1}(a;u)=S^{(p)}_{3,1}(b;u),\ p=1,2;$$

$$\text{IV. } \mathrm{S}'''_{3,1}(X_j+0;u)=\mathrm{S}'''_{3,1}(X_j-0;u),\ j=\overline{2,n-1}.$$

РОБОТА № 1

1. Написати М-функцію *spl_**mk**(X,y,T)* – обчислення в точках $T \in [a,b]$ з рівномірним кроком інтерполяційного сплайну степеня ***m*** дефекту 1 з крайовими умовами ***k***, де *X* – значення вузлів сітки $\Delta_{[a,b]}$ (нерівномірний крок), *y* – значення функції *u(x)* в вузлах сітки $\Delta_{[a,b]}$.

2. Написати М-файл для тестування *spl_**mk**(X,y,T)*, в якому побудувати графіки функцій $u(x), S_{m,1}(x;u)$ в точках *T* і знайти похибку наближення в сітковій нормі $\|S_{m,1}(X_i;u) - u(X_i)\|_C$.

Індивідуальне завдання студента визначає *Код_ УП = m.k.A.P,*
де

m – сплайн :
2 = квадратичний
3 = кубічний

k - тип крайових умов :
1 = першого
2 = другого
3 = третього
4 = четвертого

A - алгоритм побудови СЛАР для визначення коефіцієнтів сплайну :
1 = безпосередньо із означення
2 = через $m_i = S'_{m,1}(X_i;u)$
3 = через $M_i = S''_{m,1}(X_i;u)$
4 = через b_i
5 = через c_i

P - метод розв'язування СЛАР
01 = Гауса (LR-розклад)
02 = Халецького
03 = квадратного кореня
04 = відбиття (UR-розклад)
05 = монотонна права прогонка
06 = монотонна ліва прогонка
07 = немонотонна прогонка
08 = циклічна прогонка
09 = ІМ Якобі
10 = ІМ Зейделя
11 = ІМ релаксації
12 = ІМ найшвидшого спуску
13 = ІМ мінімальних нев'язок

П.2 Розв’язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма II роду

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds=f(x),\quad a\le x\le b$$

та нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма-Урисона

$$\int_a^b K(x,s,F(u(s)))ds=\Phi(x,u(s)),\quad a\le x\le b\ .$$

РОБОТА № 2

1. Розв’язати задачу 1.***K***, використовуючи квадратурні формули (КФ) Гауса з урахуванням варіанту ***V = mod(g+d,4)***, де значення ***V*** : **0** - кількість точок 4; **1** - кількість точок 5; **2** - кількість точок 6; **3** - кількість точок 7. Тут через ***K*** позначено номер за списком студента у групі, **g** – номер групи, ***d*** – день народження студента.

2. Розв’язати задачу 2.***K***, використовуючи задані згідно варіанту ***V = mod(g+d,4)*** КФ з кількістю вузлів = **5**. Значення ***V*** : **0** – формули трапецій; **1** - формули Сімпсона; **2** – формули Маркова; **3** – формули Чебишева. Для розв’язання нелінійної системи використати метод Ньютона.

1.***1*** $\quad u(x)+\int_0^x\left(\frac{3x+2x^3-t}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\cdot u(t)dt=\frac{3x+2x^3}{3\left(1+x^2\right)^2};\ x\in[0,1].$

1.***2*** $\quad u(x)-\int_0^x(1-(x-t\exp(2x)))\cdot u(t)dt=\cos(1)\cdot(1-x\exp(2x))-\sin(1)\cdot\exp(2x);\ x\in[0,\pi].$

1.***3*** $\quad u(x)-2\int_0^x\cos(x-t)\cdot u(t)dt=\sin(x)\exp(x);\ x\in[0,\pi].$

1.***4*** $\quad u(x)+\int_0^x sh(x-t)\cdot u(t)dt=x;\ x\in[0,1].$

1.***5*** $\quad u(x)+\int_0^x\exp(x-t)\cdot u(t)dt=x;\ x\in[0,2].$

1.***6*** $\quad u(x)+\int_0^x(x-t)^2\cdot u(t)dt=x^3;\ x\in[0,1].$

1.***7*** $\quad u(x)-\int_0^x(xt)\cdot u(t)dt=x;\ x\in[0,2].$

1.***8*** $\quad u(x)+\int_0^x\exp(x-t)\cdot u(t)dt=x;\ x\in[0,1].$

1.***9*** $\quad u(x)-3\int_0^x\exp(x+t)\cdot u(t)dt=x;\ x\in[0,1].$

1.***10*** $\quad u(x)+0.5\int_0^x\exp(x-t)\cdot u(t)dt=x;\ x\in[0,1].$

1.***11*** $\quad u(x)-\int_0^x u(t)dt=\exp(x);\ x\in[0,1].$

1.***12*** $\quad u(x)-2\int_0^x\left(\frac{1+2t}{(1+2x)^2}\right)\cdot u(t)dt=1;\ x\in[0,2].$

1.***13*** $\quad u(x)+\int_0^x(t-x)\cdot u(t)dt=3x+2x^3;\ x\in[0,1].$

1.***14*** $\quad u(x)+\int_0^x(t-x)\cdot u(t)dt=3\left(1+x^2\right)^2;\ x\in[0,2].$

1.**15** $$u(x)-\int_0^x (x-t)\,u(t)dt=\left(1+\cos\left(x^2\right)\right)^2;\ x\in[0,\pi].$$

1.**16** $$u(x)-\int_0^x (x-t)^2\, u(t)dt=\left(1+\cos\left(x^2\right)\right)^2;\ x\in[0,\pi].$$

1.**17** $$u(x)-\int_0^x \exp(x-t)\,u(t)dt=\exp(x);\ x\in[0,1].$$

1.**18** $$u(x)-\int_0^x \exp\left(x^2-t^2\right)u(t)dt=\exp\left(x^2\right);\ x\in[0,1].$$

1.**19** $$u(x)+\int_0^x (t-x)\,u(t)dt=1+x^2\cdot\sin(x+1);\ x\in[0,\pi].$$

1.**20** $$u(x)-\int_0^x \sin\left((x-t)^2\right)u(t)dt=\left(1+x^2\cos(x)\right);\ x\in[0,\pi].$$

1.**21** $$u(x)+\int_0^x (t-x)\,u(t)dt=5(1+x)^3;\ x\in[0,1].$$

1.**22** $$u(x)-2\int_0^x \exp(x-t)\,u(t)dt=\sin(x);\ x\in[0,\pi].$$

1.**23** $$u(x)-\int_0^x\left(\frac{2+\cos(x)}{2+\cos(t)}\right)\cdot u(t)dt=\sin(x)\exp(x);\ x\in[0,\pi].$$

1.**24** $$u(x)+\int_0^x\left(3^{x-t}\right)\cdot u(t)dt=x3^x;\ x\in[0,2].$$

1.**25** $$u(x)-\int_0^x\left(\frac{1+x^2}{1+t^2}\right)\cdot u(t)dt=1+x^2;\ x\in[0,2].$$

==

2.*1* $$u(x)-\int_{0.05}^{0.35}\exp(x-u(t))dt=x;\ x\in[0.05,0.35].$$

2.2 $$u(x)-\int_0^{\pi}\cos(x+u(t))dt=x^2;\ x\in[0,\pi].$$

2.**3** $$u(x)-\int_{0.05}^{0.15}\exp\left(-x^2+u(t)\right)dt=1+x;\ x\in[0.05,0.15].$$

2.*4* $$\int_0^1\sin\left(x^2-u(t)\right)dt=u(x)+2;\ x\in[0,1].$$

2.**5** $$\int_{-0.5}^{0.5}\cos(tx-u(t))dt=u(x)^2-x;\ x\in[-0.5,0.5].$$

2.**6** $$\int_{-0.3}^{0.3}(1-x-u(t))^2\,dt=2+\sin(u(x));\ x\in[-0.3,0.3].$$

2.*7* $$u(x)-\int_0^1\left(x-t\cdot u^2(t)\right)dt=(1+x)^2;\ x\in[0,1].$$

2.**8** $$u(x)+\int_0^{0.35}\left(1-x-u^2(t)\right)dt=x;\ x\in[0,0.35].$$

2.**9** $$\int_0^{1.5}\sin(x-u\cdot t)dt=u(x)\exp(-x);\ x\in[0,1.5].$$

2.**10** $u(x)+0.1\int_0^{1.5}\sin(xu(t))dt=1;\ x\in[0,1.5].$

2.**11** $u(x)-\int_0^{\pi}(x+\cos(u(t)))dt=\sin(x);\ x\in[0,\pi].$

2.**12** $\int_0^{\pi}\sin(x+u(t))dt=u(x)-1;\ x\in[0,\pi].$

2.**13** $\int_{-1.5}^{-1}\exp(x-u(t))dt=2-xu(x);\ x\in[-1.5,-1].$

2.**14** $\sin(u(x))-\int_0^{0.7}(x-u(t))^2dt=x;\ x\in[0,0.7].$

2.**15** $1+\int_{0.5}^{1.5}\left(x^3-u(t)\right)dt=(u(x)-x)^2;\ x\in[0.5,1.5].$

2.**16** $\int_0^1\frac{t-u^2(t)}{1+x}dt=x-u(x);\ x\in[0,1].$

2.**17** $\int_0^1\frac{x-u^3(t)}{1+t}dt=x+u(x);\ x\in[0,1].$

2.**18** $\int_0^1\frac{x-u^3(t)}{1+t\cdot x}dt=\frac{1+u(x)}{1+x.*x};\ x\in[0,1].$

2.**19** $\int_0^1(x-\sin(u(t)))dt=\frac{u(x)}{1+x};\ x\in[0,1].$

2.**20** $u(x)+\int_{-0.3}^{0.7}\exp\left(x+t-u^2(t)\right)dt=x;\ x\in[-0.3,0.7].$

2.**21** $\int_0^1\exp\left(2xt-u^2(t)\right)dt=u(x)-3;\ x\in[0,1].$

2.**22** $u(x)+0.01\int_0^1(1-u(t))^3dt=x^2;\ x\in[0,1].$

2.**23** $\int_{0.2}^1\left(1-x^2+u^2(t)\right)dt=(x-u(x))^2;\ x\in[0.2,1].$

2.**24** $\int_0^1\left(x^4+u^2(t)\right)dt=x+u(x)-u^2(x);\ x\in[0,1].$

2.**25** $\int_0^1\sqrt{x+t+u^2(t)}dt=\frac{5-u(x)}{1+x^2};\ x\in[0,1].$

Література

1.Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.– 512 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.– 432 с.
3.Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробагатько А.А. Методы вычислений. – К.: Высш. шк., 1977. – 406 с.
4.Попов В.В. Методи обчислень. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 303 с.
5.Довгий Б.П., Ловейкін А.В., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є. Сплайн-функції та їх застосування. – К.:Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. – 120 с.
6.Довгий Б.П., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Попов А.В. Використання системи комп’ютерної математики MATLAB для розв'язування прикладних задач. – К. : ВПЦ ”Київський університет”, 2016. – 143 с.